Université des Antilles et de la Guyane
-Faculté des Sciences Exactes et Naturelles-

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le titre de

Docteur de l'Université des Antilles et de la Guyane
Spécialité : Mathématiques

par

René DORVILLE

Titre

Sur le contrôle de quelques problèmes singuliers associés à l'équation de la chaleur

Soutenue publiquement le 03 juin 2004.

Commission d'examen :

B. DEHMAN	Rapporteur	Professeur de l'Université de Tunis, Tunisie
D. KONATÉ	Rapporteur	Professeur à l'Université de Virginia-Tech, USA
J.P. PUEL	Examinateur	Professeur à l'Université de Versailles, Saint-Quentin
R. JANIN	Examinateur	Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane
O. NAKOULIMA	Directeur	Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane
A. OMRANE	Examinateur	Maître de Conférences de l'Université des Antilles et de la Guyane.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse, Ousseynou Nakoulima, qui m'a proposé un sujet extrêmement riche et a guidé mes premiers pas en recherche. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant d'avoir écouté attentivement toutes mes idées, même les plus saugrenues, et de m'avoir toujours laissé une entière liberté dans mes directions de recherche, remplissant ainsi pleinement son rôle de directeur.

B. Dehman et D. Konaté ont accepté très spontanément de rapporter cette thèse. Je les en remercie.

J.P. Puel et R. Janin me font également un grand honneur en participant au jury.

Abdennebi Omrane a toujours été très disponible pour m'aider, et a joué un rôle considérable dans l'élaboration de cette thèse. Notre collaboration scientifique fut extrêmement profitable et déterminante.

Je voudrais exprimer ma sincère gratitude envers Jean Velin et Gisèle Mophou pour leur accueil très chaleureux. Durant notre collaboration, j'ai aussi pu apprécier les idées originales et l'enthousiasme de Jean Velin et de Gisèle Mophou.

J'ai beaucoup appris en assistant aux séances du groupe de travail d'Ousseynou Nakoulima, et j'ai appris plus encore en y faisant des exposés. Les travaux menés par ce groupe ont eu sur moi une influence capitale.

Je remercie Max Dorville, Marie-Claude Lescs, Marylène Troupé, Michaël Ranguin, Jean-Claude Mado et Abdellatif Moudafi pour la confiance qu'ils me témoignent.

Merci à Marc Lassonde, Michel Geoffroy, Florence Jules et Jacky Narayaninsamy pour leurs encouragements et conseils.

Un grand merci à toute ma famille et à tous mes amis.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objectifs

1.1.1 Problématique

Dans cette thèse, on s'intéresse au contrôle de trois systèmes distribués singuliers associés à l'équation de la chaleur dans le cas où l'ensemble des contrôles admissibles est un sous-ensemble convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert des contrôles.
Dans un premier temps, on étudie le contrôle de deux problèmes mal posés :

- l'équation de la chaleur rétrograde,
- un problème couplé.

On rappelle qu'un problème est dit mal posé s'il n'est pas résoluble pour des données initiales quelconques, si sa solution n'est pas unique ou si l'on ne peut choisir des normes pour les solutions et des normes pour les données initiales susceptibles d'assurer la dépendance continue de la solution par rapport aux

données du problème.
Une des méthodes utilisée par J.L. Lions pour obtenir le système d'optimalité singulier caractérisant le couple optimal est la méthode de pénalisation. Il obtient ainsi un système d'optimalité approché qui converge en emmettant une hypothèse de type Slater :

$$''\mathcal{U}_{ad} \quad \text{est d'intérieur non vide}''.$$

Ne voulant pas utiliser ce type d'hypothèses, on propose une autre approche introduite par J.L. Lions : la notion de contrôle sans regret.

Dans un deuxième temps, on étudie le contrôle d'un système à données manquantes contrôlé à zéro.

1.1.2 Problèmes modèles

On considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ deux fois continûment différentiable de dimension $(n-1)$, Ω étant localement d'un seul côté de Γ (i. e. on considère $\overline{\Omega}$ variété à bord de classe C^2, le bord étant Γ). Pour $T > 0$, on note $Q = \Omega\ \times]0, T[\ ,\ \Sigma = \Gamma\ \times\ ]0, T[$ et $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

L'équation de la chaleur rétrograde

L'étude de l'évolution de la chaleur [1] z dans le domaine Ω à l'instant t connaissant la valeur de celle-ci à l'instant final est connu pour être le prototype des problèmes mal posés (cf. [13]).

1. Energie élevant notamment la température

Elle consiste à trouver l'état $z \in L^2(Q)$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ z(T) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

La variable de contrôle $v \in \mathcal{U}_{ad}$ apparaît ici de manière distribuée dans Q mais elle peut également apparaître de manière frontière, par l'intermédiaire des conditions aux limites ou des conditions initiales.
On dit qu'un couple contrôle-état $(v, z) \in \mathcal{U}_{ad} \times L^2(Q)$ est admissible s'il vérifie (1.1).
En supposant que l'ensemble des couples admissibles est non vide, on définit la fonction coût

$$J(v, z) = \|z - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)} \tag{1.2}$$

avec $z_d \in L^2(Q)$ donné et $N > 0$.
Le contrôle optimal du système (1.1)-(1.2) consiste à trouver un couple contrôle-état $(u, y) \in \mathcal{U}_{ad} \times L^2(Q)$ solution de

$$\inf J(v, z) \qquad (v, z) \text{ admissible.} \tag{1.3}$$

On dit alors que (u, y) est un couple optimal. Il s'agit ensuite de caractériser ce couple optimal.

Un problème couplé mal posé

Ce problème représente l'évolution de la chaleur par conduction [2] dans un matériau donné. On obtiendrait simultanément la température z_1 du domaine Ω à l'instant $T - t$ connaissant sa valeur à l'instant final T, ainsi que sa température z_2 à l'instant t connaissant sa valeur à l'instant initial 0, et ce, en

2. Action de transmettre progressivement la chaleur

n'importe quel point x de Ω. Ce problème mal posé, proposé par J. L. Lions en 1985 dans [14], consiste à trouver l'état $(z_1, z_2) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{rclll} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} + \Delta z_1 - z_2 & = & v_1 & \text{dans} & Q, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} - \Delta z_2 + z_1 & = & v_2 & \text{dans} & Q, \\ z_1 = z_2 & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z_1(0) = z_2(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{1.4}$$

où le contrôle $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$.

On dit que le couple contrôle-état $((v_1, v_2), (z_1, z_2)) \in (\mathcal{U}_{ad})^2 \times \left(L^2(Q)\right)^2$ est admissible s'il vérifie le système (1.4). En supposant que l'ensemble des couples admissibles est non vide, on définit la fonction coût

$$\mathcal{J}(v, z) = \|z_1 - z_{d_1}\|^2_{L^2(Q)} + \|z_2 - z_{d_2}\|^2_{L^2(Q)} + N\left(\|v_1\|^2_{L^2(Q)} + \|v_2\|^2_{L^2(Q)}\right) \tag{1.5}$$

avec $v = (v_1, v_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $(z_{d_1}, z_{d_2}) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ et $N > 0$.

Le problème de contrôle optimal associé à (1.4) consiste à trouver un couple contrôle-état $((u_1, u_2), (y_1, y_2)) \in (\mathcal{U}_{ad})^2 \times \left(L^2(Q)\right)^2$ solution du problème :

$$\inf \mathcal{J}(v, z) \qquad (v, z) \text{ admissible.} \tag{1.6}$$

Un système à données manquantes contrôlé à zéro

Soient ω un ouvert de Ω, 1_ω l'indicatrice de ω et G un sous espace vectoriel fermé non vide de $L^2(\Omega)$. On considère le problème de l'équation de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{rclll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y & = & v + \theta.1_\omega & \text{dans} & Q, \\ y & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y(0) & = & g & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{1.7}$$

où $v \in L^2(Q)$, $\theta \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ et $g \in G$.

Les variables v, θ et g sont destinées à jouer des rôles différents que l'on va préciser en deux étapes.

Première étape : Contrôlabilité à zéro

Pour tout (v, g) fixé, la contrôlabilité à zéro du problème (1.7) consiste à trouver $\theta \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que si y est solution de (1.7) alors

$$y(T) = 0. \tag{1.8}$$

Si l'ensemble des θ tel que (1.7) et (1.8) aient lieu est non vide, on sait, moyennant un critére de sélection, en choisir un et un seul.
On note y_θ la solution unique de (1.7)-(1.8).
On définit ainsi une application $(v, g) \longmapsto \theta(v, g)$ de $\mathcal{U}_{ad} \times G$ dans $L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que $y_\theta = y_\theta(v, g)$ solution de (1.7) vérifie $y_\theta(T) = 0$.
L'intérêt du problème de contrôlabilité à zéro est que si on considère une "trajectoire" $\overline{y}$ solution de l'équation de la chaleur sans contrôle, c'est-à-dire solution du problème du type

$$\left\{\begin{array}{lcccc} \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial t} - \Delta \overline{y} & = & \overline{v} & \text{dans} & Q, \\ \overline{y} & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \overline{y}(0) & = & \overline{g} & \text{dans} & \Omega \end{array}\right.$$

avec $(\overline{v}, \overline{g}) \in L^2(Q) \times G$,
alors on peut trouver $\theta \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que la "trajectoire" y solution de (1.7) rejoigne exactement la "trajectoire" $\overline{y}$ au temps T.

Deuxième étape : Contrôle sans regret

On considère ρ une fonction "poids" choisie convenablement et l'ensemble

$$L^2_\rho(Q) = \left\{ w \in L^2(Q) \text{ tel que } \rho w \in L^2(Q) \right\}.$$

Pour $(v, g) \in L^2_\rho(Q) \times G$, on définit la fonction coût pondérée

$$J_\rho(v, g) = \|\rho[y_\theta(v, g) - z_d]\|^2_{L^2(Q)} + N\|\rho v\|^2_{L^2(Q)}$$

et on s'intéresse au problème de contrôle :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}} \sup_{g \in G} \left(J_\rho(v, g) - J_\rho(0, g) \right),$$

où $\mathcal{U}_{ad}^{\rho}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2_\rho(Q)$.

1.2 Présentation des résultats

Le chapitre 2 est consacré au contrôle des systèmes distribués de type elliptique à données manquantes dans le cas où l'espace des contrôles admissibles est $\mathcal{U}_{ad}$. Dans les chapitres suivants, on étudie le contrôle des problèmes modèles en utilisant les résultats du chapitre 2. Ainsi, pour chacun des problèmes (1.1), (1.4) et (1.7)-(1.8), on s'applique à atteindre les objectifs suivants :

i. étudier l'existence et l'unicité du couple optimal,

ii. étudier des procédés d'approximation du couple optimal,

iii. trouver des conditions nécessaires et si possible suffisantes vérifiées par le couple optimal,

en utilisant des outils faisant appel à :

- la méthode de régularisation elliptique,
- la notion de contrôle sans regret.

Chapitre 2

Contrôle des systèmes distribués à données manquantes

Ce chapitre est consacré à la notion de contrôle sans regret pour les systèmes distribués à données manquantes introduite par J.L. Lions [16] et étudiée par O. Nakoulima, A. Omrane et J. Velin [20].
Ces différents auteurs ont développé la notion dans le cas sans contraintes sur le contrôle.
On généralise ici la notion de contrôle sans regret au cas où l'espace des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert des contrôles $\mathcal{U}$.
On y rappelle les principales définitions et propriétés du contrôle sans regret (ou de Pareto) et du contrôle à moindres regrets des systèmes distribués à données manquantes de type elliptique, puis on caractérise ces contrôles à l'aide de systèmes d'optimalités.
On considère $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert réel de dual $\mathcal{V}'$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{V}')$ un opérateur différentiel elliptique modélisant un système distribué, $\mathcal{U}$ l'espace de Hilbert des contrôles, G un sous espace vectoriel fermé non vide de l'espace de Hilbert des incertitudes F et $\beta \in \mathcal{L}(F,\mathcal{V}')$.
Pour $f \in \mathcal{V}'$, l'équation d'état relative au contrôle $v \in \mathcal{U}_{ad}$ et à l'incertitude $g \in G$ est donnée par

$$A\,y(v,g) \;=\; f \;+\; v + \beta\, g. \tag{1.9}$$

En supposant que A est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, le problème (2.1) est bien posé dans $\mathcal{V}$, il admet alors une unique solution notée $y(v,g)$. Pour chaque $g \in G$, on a ainsi un état possible, auquel on attache la fonction coût

$$J(v,g) = \Big\| \, y(v,g) - z_d \Big\|_{\mathcal{V}}^2 + N\Big\|v\Big\|_{\mathcal{U}}^2 \tag{1.10}$$

où $z_d \in \mathcal{V}$ fixé, $N > 0$ et $\left\|.\right\|_X$ la norme sur l'espace de Hilbert réel X.
Si $G = \{0\}$, $J(v, g) = J(v, 0)$ et un problème standard de contrôle du système (2.1) est de chercher

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v, 0).$$

Si $G \neq \{0\}$ (G espace de dimension infinie), le problème

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v, g) \qquad \forall g \in G$$

n'a pas de sens. J.L. Lions propose alors une notion pour donner un sens au contrôle de (2.1) (2.2) : Le contrôle sans regret [16].
On démontre tout d'abord une caractérisation du contrôle à moindres regrets.

Théorème 1.1 *Le contrôle à moindres regrets u_γ, qu'on définit au chapitre 2, est caracterisé par l'unique solution $\{y_\gamma, \xi_\gamma, \rho_\gamma, p_\gamma\}$ du système :*

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} A\, y_\gamma & = & f + u_\gamma, & A^*\xi_\gamma & = & y_\gamma - y(0,0), \\ A\, \rho_\gamma & = & \dfrac{1}{\gamma}\beta\beta^*\xi_\gamma, & A^* p_\gamma & = & y_\gamma - z_d + \rho_\gamma \end{array} \right. \tag{1.11}$$

et l'inégalite variationnelle

$$\langle p_\gamma + N u_\gamma, v - u_\gamma \rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{1.12}$$

Le passage au système d'optimalité du contrôle sans regret dépendra de la régularité du système d'optimalité du contrôle à moindres regrets.

Chapitre 3

Contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde

Ce chapitre, consacré au contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde, s'appuie sur la notion de contrôle sans regret. On obtient tout d'abord le système d'optimalité caractérisant le contrôle à moindres regrets pour le problème

régularisé en ε et perturbé en γ. Et, en passant à la limite par rapport au paramètre de régularisation ($\varepsilon \longrightarrow 0$), nous déduisons le système d'optimalité perturbé (dépendant uniquement de γ) caractérisant le contrôle à moindres regrets.
La difficulté qui se pose à nous est d'obtenir le système d'optimalité caractérisant le contrôle sans regret qui est la limite du système d'optimalité perturbé ($\gamma \longrightarrow 0$).
Le point de vue proposé permet de s'affranchir de l'hypothèse de type Slater du style

$$''\mathcal{U}_{ad} \quad \text{est d'intérieur non vide}''.$$

Théorème 1.2 *Le contrôle sans regret u du problème (1.1) est caractérisé par l'unique $\{u, y, \rho, p, \xi\}$ solution du système :*

$$\left\{\begin{array}{llllllllllll} Ly & = & u, & L\rho & = & 0, & L^*p & = & y - z_d + \rho, & L^*\xi & = & y \quad \text{dans} \quad Q, \\ y & = & 0, & \rho & = & 0, & p & = & 0, & \xi & = & 0, \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) & = & 0, & \rho(0) & = & \lambda(0) & & & & & & \text{dans} \quad \Omega, \\ & & & & & & p(T) & = & 0, & \xi(T) & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right.$$

et on a l'inégalité variationnelle

$$(\, p + Nu, v - u\,) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \text{ et } L^* = -\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \text{ son opérateur adjoint}; \\ u,\ y,\ p,\ \rho,\ \xi \ \in \ L^2(]0, T[; L^2(\Omega)), \quad \lambda(0) \in L^2(\Omega). \end{array}\right.$$

Chapitre 4

Contrôle d'un problème couplé mal posé

Le chapitre 4 est consacré au contrôle d'un problème couplé mal posé associé à l'équation de la chaleur.
Dans un premier temps, on s'assure que l'ensemble des couples admissibles de ce problème est non vide. On reprend ensuite la méthode de pénalisation afin de caractériser le couple optimal. On y parvient en emmettant une hypothèse de type Slater.
Dans un second temps, on propose la notion de contrôle sans regret. Pour ce faire, on applique la notion de contrôle à moindres regrets au problème régularisé de type elliptique.

Théorème 1.3 *Le contrôle sans regret* $u = \lim_{\gamma\to 0} u^\gamma$ *pour le problème couplé (1.4) est caractérisé par l'unique solution* $\{u, y, \xi, \rho, p\}$ *du problème*

$$\begin{cases} \mathcal{A}y = u, \qquad \mathcal{A}^*\xi = y, \qquad \mathcal{A}\rho^\gamma = 0, \\ \qquad \mathcal{A}^*p = y - z_d + \rho \qquad\qquad \textit{dans } Q, \\ \\ y = 0, \quad \xi = 0, \quad \rho = 0, \quad p = 0 \qquad \textit{sur } \Sigma, \\ \\ y_2(0) = 0, \; \xi_1(0) = 0, \; \rho_2(0) = 0, \quad p_1(0) = 0, \\ \\ y_1(T) = 0, \; \xi_2(T) = 0, \; \rho_1(T) = \lambda_1(T), \; p_2(T) = 0 \; \textit{dans } \Omega, \end{cases}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\langle p + Nu, v - u \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}.$$

De plus, on a les limites faibles suivantes :

$$y = \lim_{\gamma \to 0} y^{\gamma} \quad , \xi = \lim_{\gamma \to 0} \xi^{\gamma} \quad , \rho = \lim_{\gamma \to 0} \rho^{\gamma} \quad , p = \lim_{\gamma \to 0} p^{\gamma},$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta & -I_d \\ I_d & \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \end{pmatrix},$$

$$u,\ y,\ p,\ \rho,\ \xi\ \in \left(L^2(Q)\right)^2 \ \textit{et}\ \lambda(T) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Chapitre 5

Un système à données manquantes contrôlé à zéro

Dans ce chapitre, on s'intèresse au contrôle d'un problème issu de la contrôlabilité à zéro d'un système à données manquantes associé à l'équation de la chaleur. Et on démontre les résultats suivants :

Cas où $\mathbf{G} = \{\mathbf{0}\}$

Théorème 1.4 *Le contrôle optimal $u \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}$ pour le problème (5.1)(5.4) est caractérisé par la donnée du triplet $(u, y, p) \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho} \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ solution de*

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y & = & u + \theta(u,0).1_{\omega}, & -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p & = & \rho^2[y(u,0) - z_d] & \textit{dans } Q, \\ y & = & 0, & p & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ y(0) & = & 0, & y(T) & = & 0 & \textit{dans } \Omega \end{array} \right. \tag{1.13}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$(p + \rho^2 N u, v - u)_{L^2(Q)} + (p, \theta(v,0) - \theta(u,0))_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}. \tag{1.14}$$

Cas où $\mathbf{G} \neq \{\mathbf{0}\}$

Théorème 1.5 *Le contrôle sans regret $u \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}$ du problème (1.7) est caractérisé par la donnée du quadruplet $\{u, y, \widetilde{\theta}, p\} \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho} \times L^2(Q) \times V \times L^2(Q)$ solution unique du système*

$$\left\{\begin{array}{lll lll ll} L\,y &=& u+\theta(u,0).1_{\omega}, & L\,p &=& y-z_d+\widetilde{\theta}\,.1_{\omega} & \textit{dans} & Q,\\ y &=& 0, & p &=& 0 & \textit{sur} & \Sigma,\\ y(0) &=& 0, & p(0) &=& 0 & \textit{dans} & \Omega,\\ y(T) &=& 0, & p(T) &=& 0 & \textit{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{1.15}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\Big(T^*[Lp-\widetilde{\theta}\,.1_{\omega}]+N\rho^2 u, v-u\Big)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho} \tag{1.16}$$

où $y = y(u,0)$, $p = p(u,0)$, $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}(u,0)$, $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$, S^* est l'adjoint de l'opérateur S (défini au chapitre 5) et T^* l'adjoint de l'opérateur

$$T:\ v \mapsto L^*\widetilde{p}(v,0).$$

Chapitre 2

Contrôle des systèmes distribués à données manquantes

Ce chapitre est consacré à la notion de contrôle sans regret pour les systèmes distribués à données manquantes introduite par J.L. Lions [16] et étudiée par O. Nakoulima, A. Omrane et J. Velin [20].
Ces différents auteurs ont développé la notion dans le cas sans contraintes sur le contrôle.
On généralise ici la notion de contrôle sans regret au cas où l'espace des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert des contrôles $\mathcal{U}$.
On y rappelle les principales définitions et propriétés du contrôle sans regret (ou de Pareto) et du contrôle à moindres regrets des systèmes distribués à données manquantes de type elliptique, puis on caractérise ces contrôles à l'aide de systèmes d'optimalités.

2.1 Position du problème

On considère $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert réel de dual $\mathcal{V}'$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{V}')$ un opérateur différentiel elliptique modélisant un système distribué, $\mathcal{U}$ l'espace de Hilbert des contrôles, G un sous espace vectoriel fermé non vide de l'espace de Hilbert des incertitudes F et $\beta \in \mathcal{L}(F, \mathcal{V}')$.
Pour $f \in \mathcal{V}'$, l'équation d'état relative au contrôle $v \in \mathcal{U}_{ad}$ et à l'incertitude $g \in G$ est donnée par

$$A\, y(v, g) \;=\; f \;+\; v + \beta\, g. \tag{2.1}$$

En supposant que A est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, le problème (2.1) est bien posé dans $\mathcal{V}$, il admet alors une unique solution notée $y(v, g)$. Pour chaque $g \in G$, on a ainsi un état possible, auquel on attache la fonction coût

$$J(v, g) = \Big\| y(v, g) - z_d \Big\|^2_{\mathcal{V}} + N \Big\| v \Big\|^2_{\mathcal{U}} \tag{2.2}$$

où $z_d \in \mathcal{V}$ fixé, $N > 0$ et $\Big\| . \Big\|_X$ la norme sur l'espace de Hilbert réel X.
Si $G = \{0\}$, $J(v, g) = J(v, 0)$ et un problème standard de contrôle du système (2.1) est de chercher

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v, 0).$$

Si $G \neq \{0\}$ (G espace de dimension infinie), le problème

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v, g) \qquad \forall g \in G$$

n'a pas de sens. J.L. Lions propose alors deux notions pour donner un sens au contrôle de (2.1)(2.2) : Le contrôle de Pareto [15] et le contrôle sans regret [16].

Remarque 2.1 Dans le problème (2.1), la variable g peut être considérée comme une "perturbation" ou une "pollution". Les pollutions peuvent apparaître dans les conditions initiales, dans les conditions aux limites ou dans le second membre.

2.2 Définitions et Résultats préliminaires

On introduit ici pour les systèmes distribués à données manquantes de type elliptique les notions de contrôle de Pareto, de contrôle sans regret relatif à un contrôle donné u_0 et de contrôle à moindres regrets dont on donne les premières propriétés.

Définition 2.1 (Le contrôle de Pareto)
1) On dit que $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est un contrôle de Pareto pour (2.1)(2.2) s'il n'existe pas de contrôle $v \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(v,g) \leq J(u,g) \ \forall g \in G$, avec inégalité stricte pour au moins un $g_0 \in G$.
2) On dit qu'un contrôle de Pareto $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est relatif à un contrôle $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ si

$$J(u,g) \leq J(u_0,g) \qquad \forall g \in G. \tag{2.3}$$

Définition 2.2 (Le contrôle sans regret)
On dit que $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est un contrôle sans regret relatif à $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ pour (2.1)(2.2) si u est solution du problème

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \sup_{g \in G} \left(J(v,g) - J(u_0,g) \right). \tag{2.4}$$

Lorsque $u_0 = 0$, la définition 2.2 coïncide avec celle du contrôle sans regret défini par J. L. Lions dans [16].

Remarque 2.2 Pour tout $(u_0, v) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$

$$J(v,g) - J(u_0,g) = J(v,0) - J(u_0,0) + 2\langle S(v-u_0), g\rangle_{G',G} \qquad \forall g \in G \quad (2.5)$$

où S est un opérateur linéaire défini de la façon suivante :
A partir de $\xi(v) \in \mathcal{V}$ défini par

$$A^*\xi(v) = y(v,0) - y(0,0),$$

on pose $S(v) = \beta^*\,\xi(v)$.

Remarque 2.3 Bien entendu le problème (2.4) est défini uniquement pour les contrôles $v \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$\sup_{g\in G}\left(J(v,g) - J(u_0,g)\right) < \infty.$$

De l'égalité (2.5), on montre que ceci est vérifié pour les contrôles v tels que $v \in K + \{u_0\}$ où $K = \left\{w \in \mathcal{U}_{ad}, \langle\, S(w), g\,\rangle = 0 \quad \forall g \in G\right\}$.

Lemme 2.1 (Cf. J. L. Lions [15]) *Pour tout $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, il existe un unique contrôle de Pareto relatif à u_0. De plus, c'est l'unique élément de l'ensemble $K + \{u_0\}$ qui minimise la fonctionnelle $J(v,0)$ sur $K + \{u_0\}$.*

Théorème 2.1 *Pour tout $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, un contrôle est un contrôle de Pareto relatif à u_0 si et seulement si u est un contrôle sans regret relatif à u_0.*

2.3 Contrôle à moindres regrets

On relaxe le problème (2.3) en s'intéressant aux contrôles u_γ tels que

$$J(u_\gamma, g) \leq J(u_0, g) + \gamma\|g\|_G^2 \qquad (2.6)$$

où $\gamma > 0$. Ce problème perturbé revient au problème

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} \sup_{g\in G} \left[J(v,g) - J(u_0,g) - \gamma\|g\|^2_G\right]. \tag{2.7}$$

Grâce à (2.5), ce problème équivaut à

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} \left[J(v,0) - J(u_0,0) + \sup_{g\in G}\Big(\langle 2S(v-u_0), g\rangle - \gamma\|g\|^2_G\Big)\right].$$

Par définition de la polaire d'une forme linéaire (cf.[1]), si donc, on identifie G à son dual G', le problème perturbé (2.7) peut s'écrire sous la forme d'un problème de contrôle classique avec une fonction coût quadratique :

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}^\gamma(v) \tag{2.8}$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(u_0,0) + \frac{1}{\gamma}\Big\|S(v-u_0)\Big\|^2_G. \tag{2.9}$$

Lemme 2.2 *Le problème perturbé* (2.8)(2.9) *admet une unique solution* $u_\gamma \in \mathcal{U}_{ad}$ *qu'on définit comme étant le contrôle à moindres regrets.*

Remarque 2.4 (Cf. J. L. Lions [17]) Avec le "contrôle à moindres regrets", nous faisons un choix de contrôles v qui font "au moins aussi bien" que de choisir un contrôle u_0. Un tel choix de v est alors donné par (2.7).

Remarque 2.5 Contrairement au contrôle de Pareto, le contrôle sans regret permet de considérer la notion de contrôle à moindres regrets que l'on interprète comme une approximation du contrôle sans regret.

Théorème 2.2 *Le contrôle à moindres regrets* u_γ *converge faiblement dans* $\mathcal{U}_{ad}$ *vers l'unique contrôle sans regret* u *relatif à* u_0.

Démonstration - Par définition, le contrôle à moindres regrets u_γ vérifie

$$J(u_\gamma,0)-J(u_0,0)+\frac{1}{\gamma}\Big\|S(u_\gamma-u_0)\Big\|_G^2 \leq J(v,0)-J(u_0,0)+\frac{1}{\gamma}\Big\|S(v-u_0)\Big\|_G^2 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

En particulier si $v = u_0$, on a

$$J(u_\gamma,0) - J(u_0,0) + \frac{1}{\gamma}\Big\|S(u_\gamma - u_0)\Big\|_G^2 \leq 0,$$

d'où

$$\Big\|y(u_\gamma,0) - z_d\Big\|_{\mathcal{V}}^2 + N\Big\|u_\gamma\Big\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{\gamma}\Big\|S(u_\gamma - u_0)\Big\|_G^2 \leq J(u_0,0). \qquad (2.10)$$

On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u_\gamma\|_{\mathcal{U}} \leq C$. On peut donc extraire de $(u_\gamma)_\gamma$ une suite, notée de la même façon qui converge faiblement vers $u \in \mathcal{U}_{ad}$ solution de (2.8).
Pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$,

$$J(v,g) - J(u_0,g) - \gamma\|g\|^2 \leq J(v,g) - J(u_0,g) \quad \forall g \in G$$

alors

$$J(u_\gamma,g) - J(u_0,g) - \gamma\|g\|^2 \leq \sup_{g\in G}\left(J(v,g) - J(u_0,g)\right) \quad \forall g \in G$$

et en passant à la limite, on obtient

$$J(u,g) - J(u_0,g) \leq \sup_{g\in G}\left(J(v,g) - J(u_0,g)\right) \qquad \forall g \in G.$$

Par conséquent, u est le contrôle sans regret relatif à u_0.

∎

Caractérisation du contrôle à moindres regrets

Théorème 2.3 *Le contrôle à moindres regrets u_γ solution de (2.8)-(2.9) est caracterisé par l'unique solution $\{y_\gamma, \xi_\gamma, \rho_\gamma, p_\gamma\}$ du système :*

$$\left\{\begin{array}{lcllcl} A\,y_\gamma & = & f + u_\gamma, & A^*\xi_\gamma & = & y_\gamma - y(0,0), \\ A\,\rho_\gamma & = & \dfrac{1}{\gamma}\beta\beta^*\xi_\gamma, & A^*p_\gamma & = & y_\gamma - z_d + \rho_\gamma \end{array}\right. \tag{2.11}$$

et l'inégalite variationnelle

$$\langle p_\gamma + Nu_\gamma, v - u_\gamma \rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.12}$$

Démonstration - La condition nécessaire d'Euler-Lagrange appliquée à $\mathcal{J}^\gamma$ implique pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$

$$\begin{aligned} &\langle y(u_\gamma, 0) - z_d, y(v - u_\gamma, 0) - y(0,0)\rangle_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} \\ &\qquad + \langle Nu_\gamma, v - u_\gamma\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} + 2\left\langle \frac{1}{\gamma}S(u_\gamma), S(v - u_\gamma)\right\rangle_{G\times G} \geq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

On note maintenant $y_\gamma = y(u_\gamma, 0)$, $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma)$ et $S(u_\gamma) = \beta^*\xi_\gamma$. On a par définition

$$A^*\xi_\gamma = y_\gamma - y(0,0).$$

Puis, en considérant $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma)$ solution de $A\rho_\gamma = \dfrac{1}{\gamma}\beta\beta^*\xi_\gamma$, on montre que $\left\langle \dfrac{1}{\gamma}S(u_\gamma), S(v - u_\gamma)\right\rangle_{G\times G} = \langle \rho_\gamma, y(v - u_\gamma, 0) - y(0,0)\rangle_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$.

On introduit maintenant l'état adjoint $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ défini par

$$A^*p_\gamma = y_\gamma - z_d + \rho_\gamma,$$

ce qui implique

$$\langle p_\gamma + Nu_\gamma, v - u_\gamma\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On trouve donc le système d'optimalité cherché.

∎

2.4 Système d'optimalité "singulier" du contrôle sans regret

Soient $\widetilde{G}$ le complété de G dans F, $\rho \in \mathcal{V}$ la solution du problème

$$A\,\rho = \beta\,g, \quad g \in G$$

et $\sigma \in \mathcal{V}$ solution de

$$A^*\sigma = \rho.$$

On définit $\mathcal{R}$ l'opérateur tel que $\mathcal{R}\,g = \sigma$.
En émettant l'hypothèse
" *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\Big\|\mathcal{R}\,g\Big\|_{\widetilde{G}} \geq C\Big\|g\Big\|_{G} \quad \forall g \in G$ ",
qui est d'ailleurs restrictive en théorie mais qui n'est pas nécessaire dans la pratique, O. Nakoulima, A. Omrane et J. Velin obtiennent le système d'optimalité du contrôle sans regret pour le problème (2.1) lorsque l'espace des contrôles admissibles est $\mathcal{U}$ tout entier. Ce système d'optimalité singulier est de la forme

$$\left\{\begin{array}{lllllll} A\,y & = & f+u, & & A^*p & = & y-z_d+\rho, \\ A\,\rho & = & \lambda, & & p+Nu & = & 0, \end{array}\right.$$

avec $\lambda \in \widetilde{G}$.
En ce qui nous concerne, dans le cas de $\mathcal{U}_{ad} \neq \mathcal{U}$, on ne peut trouver le système d'optimalité du contrôle sans regret pour le problème (2.1). Cela est dû à l'inégalité variationnelle

$$\langle p_\gamma + Nu_\gamma, v - u_\gamma\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

qui ne permet pas de dégager une estimation à priori sur p_γ, contrairement au cas de $\mathcal{U}$ où cette inégalité devient une égalité. Pour débloquer la situation,

il suffit d'adjoindre une hypothèse de type Slater. Or, justement on veut s'affranchir de ce type d'hypothèses.
Comme on le verra dans les chapitres suivants, dans certains cas, on peut trouver le système d'optimalité du contrôle sans regret lorsque la régularité du problème (2.11)-(2.12) est suffisante.

Chapitre 3

Contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde

Ce chapitre, consacré au contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde associé à l'équation de la chaleur, s'appuie sur la notion de contrôle sans regret. On obtient tout d'abord le système d'optimalité caractérisant le contrôle à moindres regrets pour le problème régularisé en ε et perturbé en γ. Et, en passant à la limite par rapport au paramètre de régularisation ($\varepsilon \longrightarrow 0$), nous déduisons le système d'optimalité perturbé (dépendant uniquement de γ) caractérisant le contrôle à moindres regrets.

La difficulté qui se pose à nous est d'obtenir le système d'optimalité caractérisant le contrôle sans regret qui est la limite du système d'optimalité perturbé ($\gamma \longrightarrow 0$).

Le point de vue proposé permet de s'affranchir de l'hypothèse de type Slater du style

$$''\mathcal{U}_{ad} \quad \text{est d'intérieur non vide}''.$$

3.1 Position du problème

3.1.1 L'équation de la chaleur rétrograde

Le problème étudié ici consiste à trouver $z \in L^2(Q)$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= v \text{ dans } Q, && (3.1)\\ z &= 0 \text{ sur } \Sigma, && (3.2)\\ z(T) &= 0 \text{ dans } \Omega, && (3.3) \end{aligned}$$

avec $v \in L^2(Q)$.

Lemme 3.1 *Toute solution z de l'équation de la chaleur est presque partout égale à une fonction continue de $[0,T]$ dans $H^{-1}(\Omega)$. De plus, on a*

$$z_{|_\Sigma} \in H^{-1}\left(]0,T[; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \tag{3.4}$$

Démonstration - Montrons que

$$\frac{\partial z}{\partial t} \in L^2\left(]0,T[; H^{-2}(\Omega)\right). \tag{3.5}$$

Soit $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ le produit scalaire dans la dualité $L^2(]0,T[; H^{-2}(\Omega)), L^2(]0,T[; H_0^2(\Omega))$. Comme l'opérateur laplacien Δ est linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega)$, à l'aide de l'équation d'état (3.1), pour tout $\varphi \in L^2(]0,T[; H_0^2(\Omega))$ on a

$$\left|\left\langle \frac{\partial z}{\partial t}, \varphi \right\rangle\right| = |\langle v + \Delta z, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{L^2(]0,T[;H_0^2(\Omega))},$$

d'où

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|_{L^2(]0,T[;H^{-2}(\Omega))} = \sup_{\|\varphi\|_{L^2(]0,T[;H_0^2(\Omega))}\leq 1} \left|\left\langle \frac{\partial z}{\partial t}, \varphi \right\rangle\right| \leq C.$$

On a bien (3.5). En résumé

$$\left|\begin{array}{rcl} z & \in & L^2(]0,T[;L^2(\Omega)) \subset L^2(]0,T[;H^{-1}(\Omega)), \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} & \in & L^2(]0,T[;H^{-2}(\Omega)). \end{array}\right.$$

Par conséquent, après modifications éventuelles dans un ensemble de mesure nulle, on en déduit que l'application $t \longmapsto z(t)$ est presque partout égale à une fonction continue de $[0,T]$ dans $H^{-1}(\Omega)$.
Puisque $z \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$, le théorème des traces donne $z_{|_\Sigma} \in L^2(]0,T[;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ qui est inclus dans $H^{-1}(]0,T[;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

■

D'après le lemme 3.1, la condition aux limites (3.2) (comme égalité dans $H^{-1}(\Omega)$) et la donnée finale (3.3) ont bien un sens.

Remarque 3.1 Ce problème n'admet pas de solution pour des données initiales quelconques. En effet, voici un contre-exemple : Pour $n = 1$, $\Omega =]0,\pi[$, $T = 1$ et $v = v(x,t)$ donné par

$$v(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m \geq 1} \frac{\sin mx}{m^2} \ .$$

Il devient : trouver $z \in L^2(]0,1[;L^2(]0,\pi[))$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcllr} \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) & = & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sum \dfrac{\sin mx}{m^2} & \text{dans} &]0,\pi[\times]0,1[, \\ z(0,t) = z(\pi,t) & = & 0 & \text{dans} &]0,1[, \\ z(x,1) & = & 0 & \text{dans} &]0,\pi[. \end{array}\right. \qquad (3.6)$$

On remarque que v appartient bien à $L^2(]0,1[;L^2(]0,\pi[))$, comme somme d'une série de fonctions continues convergeant normalement.

Etant donné que la solution éventuelle z de (3.6) est telle que l'application $x \longmapsto z(x,t) \in L^2(]0,\pi[)$, on cherche une solution sous la forme

$$z(x,t) = \sum_{m\geq 1} z_m(t) w_m(x) \tag{3.7}$$

où $w_m(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin mx$ pour $m \geq 1$, est un vecteur propre pour l'opérateur $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ relativement à la valeur propre m^2. On sait que la famille $(w_m)_{m\geq 1}$ est une base orthonormée de $L^2(]0,\pi[)$.
On remplace (3.7) dans (3.6), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{dz_m}{dt}(t) + m^2 z_m(t) & = & \dfrac{1}{m^2} & \text{dans} \quad]0,1[, \\ z_m(1) & = & 0, & \end{array} \right.$$

d'où

$$z_m(t) = \frac{1}{m^2} \int_1^t e^{m^2(s-t)} ds = \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{m^2(1-t)}\right).$$

Pour tout $t \in [0,1[$, on a

$$\|z\|^2_{L^2(]0,\pi[)} = \left\| \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{m^2(1-t)}\right) w_m(x) \right\|^2_{L^2(]0,\pi[)} = \sum_{m\geq 1} \left| \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{m^2(1-t)}\right) \right|^2.$$

Or, pour tout $t \in [0,1[$

$$\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{1}{m^4} \left(1 - e^{m^2(1-t)}\right) \right|^2 = +\infty,$$

donc la série diverge et la solution z du problème (3.6) n'existe pas.

Lemme 3.2 *Le problème* (3.1)(3.2)(3.3) *admet une solution unique pour un ensemble de fonctions v dense dans $L^2(Q)$.*

Démonstration - Soit l'ensemble

$$E = \left\{ w \in L^2(\Omega) \text{ tel que } -\Delta w = \lambda w \text{ et } w = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}. \tag{3.8}$$

On note $VectE$ le sous-espace des combinaisons linéaires d'éléments de E. On sait que $VectE$, dense dans $L^2(\Omega)$, est aussi l'ensemble des sommes finies de vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$.
Montrons que le problème (3.1)(3.2)(3.3) admet une solution unique lorsque v appartient au produit tensoriel $L^2(]0,T[) \otimes VectE$ qui est dense dans $L^2(Q)$.
Soit $v \in L^2(]0,T[) \otimes VectE$, il existe alors $g \in L^2(]0,T[)$ et $(w_i)_{1\leq i\leq N} \subset VectE$ tel que

$$v(x,t) = g(t) \sum_{i=1}^{N} w_i(x).$$

On cherche alors z de la forme

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \zeta_i(t) w_i(x);$$

pour j=1,...,N ceci implique que ζ_j est solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_j}{\partial t} + \lambda_j \zeta_j & = & g \quad \text{dans} \quad]0,T[, \\ \zeta_j(0) & = & 0, \end{cases}$$

où λ_j est la valeur propre associée à w_j.
Ce qui définit bien ζ_j de façon unique.

■

Remarque 3.2 La structure du problème (3.1)(3.2)(3.3) montre que les états appartiennent plus précisément à l'ensemble

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi \in L^2(Q) \text{ tel que } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi \in L^2(Q),\ \varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}. \tag{3.9}$$

Définition 3.1 On dit qu'un couple (v, z) est admissible si

$$\left| \begin{array}{l} v \in \mathcal{U}_{ad}, \\ z \in L^2(Q) \text{ vérifiant le problème (3.1)(3.2)(3.3).} \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{X}_{ad}$ l'ensemble des couples admissibles.

Remarque 3.3 Il faut que $\mathcal{X}_{ad}$ ne soit pas vide. Or si $\mathcal{U}_{ad} = \{v_0\}$, v_0 étant tel que le problème (3.1)(3.2)(3.3) n'admette pas de solution dans $L^2(Q)$, alors $\mathcal{X}_{ad}$ est vide.

On est donc amené à supposer dans toute la suite que $\mathcal{X}_{ad}$ est non vide. C'est par exemple le cas si on fait l'hypothèse de type Slater

$$'' \, \mathcal{U}_{ad} \text{ est d'intérieur non vide } ''. \tag{3.10}$$

En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *On suppose (3.10). Alors l'ensemble des couples admissibles* $\mathcal{X}_{ad}$ *est non vide.*

Démonstration - Puisque l'intérieur de $\mathcal{U}_{ad}$ est non vide, la densité du produit tensoriel $L^2(]0, T[) \otimes E$ dans $L^2(Q)$ implique qu'il existe un élément de $L^2(]0, T[) \otimes E$ à l'intérieur de $\mathcal{U}_{ad}$. On conclut par le lemme 3.2.

■

3.1.2 Contrôle optimal

Dans toute la suite, sauf mention contraire, on suppose que $\mathcal{X}_{ad}$ est non vide (l'hypothèse de type Slater (3.10) a lieu). On définit alors un coût par la fonction définie par :

$$J(v,z) = \|z - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)}. \tag{3.11}$$

avec $z_d \in L^2(Q)$ donné et $N > 0$.
On s'intéresse au problème de contrôle optimal

$$J(u,y) = \inf_{(v,z)\,\in\,\mathcal{X}_{ad}} J(v,z). \tag{3.12}$$

On montre tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Le problème de contrôle optimal* (3.12) *admet une unique solution* (u,y) *appelée couple optimal.*

Démonstration - L'ensemble des couples admissibles étant non vide et $J : L^2(Q) \times L^2(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction semi-continue inférieurement, strictement convexe, coercive alors il existe un unique couple admissible (u,y) solution du problème (3.12).

■

Remarque 3.4 En utilisant la condition d'optimalité d'Euler

$$\frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda(v-u), y + \lambda(z-y))_{|\lambda=0} \geq 0 \quad \forall (v,z) \in \mathcal{X}_{ad},$$

le couple optimal (u,y) est caracterisé par

$$(y - z_d, z - y)_{L^2(Q)} + N(u, v-u)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall (v,z) \in \mathcal{X}_{ad}.$$

Notre objectif est maintenant de trouver un système d'optimalité découplé caractérisant (u,y). Une méthode classique en la matière est la méthode de pénalisation de Lions qui consiste à approcher (u, y) par un problème pénalisé. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$, on définit alors la fonction coût pénalisée

$$J_\varepsilon(v, z) = J(v, z) + \frac{1}{\varepsilon}\|\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - v\|^2_{L^2(Q)}.$$

Le couple optimal $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$, inhérent à cette nouvelle fonction coût, converge vers (u, y).

On a donc un procédé d'approximation théorique du couple optimal (u, y). A l'aide des conditions d'Euler du premier ordre satistifaite par $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$,

$$\frac{d}{dt} J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon + t(z - y_\varepsilon))_{|t=0} = 0 \qquad \forall z \in \mathcal{F} \tag{3.13}$$

et

$$\frac{d}{dt} J_\varepsilon(u_\varepsilon + t(v - u_\varepsilon), y_\varepsilon)_{|t=0} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \tag{3.14}$$

un système d' optimalité approché est obtenu après avoir introduit l'état adjoint approché

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

Le point essentiel est l'utilisation de la méthode des estimations a priori [1] nous permettant de passer à la limite. Cela est possible en faisant l'hypothèse de type Slater (3.10).

Lemme 3.3 (Cf. J.L. Lions [13]) *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C. \tag{3.15}$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve alors un système d'optimalité singulier $(S.O.S.)$ caractérisant le couple optimal (u, y).

1. Elle consiste à borner p_ε dans $L^2(Q)$.

Théorème 3.3 (Cf. J.L. Lions [13]) *Le couple optimal* $(u, y) \in \mathcal{U}_{ad} \times L^2(Q)$ *du problème* (3.1)(3.2)(3.3) *est caractérisé par le triplet* $(u, y, p) \in \mathcal{U}_{ad} \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ *solution de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = u, & -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = y - z_d \quad dans \quad Q, \\ y(x, T) = 0, & p(x, 0) = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ y = 0, & p = 0 \quad sur \quad \Sigma \end{cases} \tag{3.16}$$

et on a l'inégalité variationnelle

$$(p + Nu, v - u)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.17}$$

Remarque 3.5 On peut obtenir une estimation a priori moins forte que (3.15) sur p_ε sans aucune hypothèse sur $\mathcal{U}_{ad}$.
En effet, montrons à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que pour tout compact K de Q il existe une constante strictement positive C telle que

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2(K)} \leq C.$$

Supposons que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|p_\varepsilon\|_{L^2(K)} = +\infty.$$

On pose $q_\varepsilon = \dfrac{p_\varepsilon}{\|p_\varepsilon\|_{L^2(K)}}$, on a bien sûr

$$\|q_\varepsilon\|_{L^2(K)} = 1 \tag{3.18}$$

et d'après l'égalité (4.11) et la formule de Green,

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} - \Delta q_\varepsilon = \dfrac{y_\varepsilon - z_d}{\|p_\varepsilon\|_{L^2(K)}} & \text{dans} \quad Q, \\ q_\varepsilon(x, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.19}$$

or
$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{y_\varepsilon - z_d}{\|p_\varepsilon\|_{L^2(K)}} = 0 \; dans \; L^2(Q).$$
Mais d'après la régularite locale des solutions de l'équation de la chaleur, il résulte de (3.19) que, pour tout ouvert $\mathcal{O}$ avec $\overline{\mathcal{O}} \subset Q$,
$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|q_\varepsilon\|_{H^{2,1}(\mathcal{O})} = 0. \tag{3.20}$$
En prenant $K \subset \mathcal{O}$ et en notant que l'injection de $H^{2,1}(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$ est compacte on a
$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|q_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O})} = 0,$$
d'où la contradiction avec (3.18).

Remarque 3.6 Dans le cas où $\mathcal{U}_{ad} = L^2(Q)$ (sans contraintes), sans faire appel au contrôle optimal, on peut trouver une démonstration directe de l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.16)(3.17) :
Tout d'abord, il faut remarquer que l'inégalité variationnelle (3.17) équivaut à
$$p + Nu = 0. \tag{3.21}$$
En munissant
$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi \in L^2(Q) \text{ tel que } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi \in L^2(Q),\ \varphi(T) = 0 \text{ et } \varphi|_\Sigma = 0 \right\}$$
de la norme du graphe de l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$
$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} = \left(|\varphi|^2_{L^2(Q)} + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi \right|^2_{L^2(Q)} \right)^{\frac{1}{2}},$$
$\mathcal{F}$ est un espace de Hilbert.
On multiplie l'équation d'état du problème adjoint par $-\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta\varphi$
$$\left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi \right)_{L^2(Q)} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y, \varphi \right)_{L^2(Q)} + \left(z_d, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi \right)_{L^2(Q)},$$

ce qui implique, en utilisant l'équation d'état vérifiée par le couple optimal et l'égalité (3.21),

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi\right)_{L^2(Q)} = -\frac{1}{N}(p,\varphi)_{L^2(Q)} + \left(z_d, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi\right)_{L^2(Q)}. \quad (3.22)$$

On considère la forme bilinéaire a sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ et la forme linéaire ℓ sur $\mathcal{F}$ définies par :

$$a(p,\varphi) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi\right)_{L^2(Q)} + \frac{1}{N}(p,\varphi)_{L^2(Q)}$$

et

$$\ell(\varphi) = \left(z_d, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi\right)_{L^2(Q)}.$$

L'équation (3.22) est alors équivalente au problème

$$a(p,\varphi) = \ell(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{F},$$

qui, d'après le théorème de Lax-Milgram, admet une unique solution $p \in \mathcal{F}$. Une fois que l'adjoint p est connu, l'état y est donné par

$$y = z_d - \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p.$$

3.1.3 Orientation

Dans le cadre du contrôle optimal classique, nous venons de voir que la condition de Slater,

$$''\mathcal{U}_{ad} \text{ d'intérieur non vide}'', \quad (3.23)$$

permet de trouver des estimations a priori sur l'état adjoint approché p_ε. De ces estimations, on déduit alors l'existence et l'unicité de l'état adjoint p, d'où le système d'optimalité caractérisant le couple optimal pour ce problème mal posé associé à l'équation de la chaleur.

Cela dit, dans de nombreuses applications la condition de Slater n'est pas vérifiée. C'est par exemple le cas si :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left(L^2(Q)\right)^+ = \left\{v \in L^2(Q)\ ;\ v \geq 0\right\},$$

qui est d'intérieur vide. Il peut être donc "utile" de traiter autre chôse qui n'utilise pas la condition de Slater.
On renonce donc au contrôle standard et on propose ici une autre notion qui nous semble indiquée pour ce problème mal posé associé à l'équation de la chaleur, c'est l'objet du chapitre 3.

3.2 Contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on reprend le problème mal posé associé à l'équation de la chaleur étudié que l'on régularise par un problème elliptique à données manquantes auquel on applique la notion de contrôle à moindres regrets.

3.2.1 Régularisation elliptique

Cette méthode consiste à "approcher" les équations d'évolution paraboliques par des équations elliptiques en ajoutant une (des) condition(s) aux limites convenable(s). Plus précisément, on obtient le régularisé elliptique en ajoutant à $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ l'opérateur $-\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, l'opérateur obtenu est bien elliptique. Mais, il manque une condition initiale dont on ne connaît pas la valeur, d'où l'introduction de cette condition ayant pour valeur l'incertitude g.

Le régularisé elliptique obtenu est donc

$$\begin{cases} -\varepsilon \dfrac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial t^2} + \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon & = & v & \text{dans} & Q, \\ y_\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y_\varepsilon(T) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ y_\varepsilon(0) & = & g & \text{dans} & \Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

où $g \in G$, G sous-espace vectoriel fermé non vide de $L^2(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ étant destiné à tendre vers 0.
On va montrer maintenant le résultat :

Théorème 3.4 *Pour tout $\varepsilon > 0$, le régularisé elliptique* (3.1)-(3.3) *admet une unique solution y_ε.*

Démonstration - Soit l'espace

$$\mathcal{H} = \left\{ \varphi \in H^1(Q) \text{ tel que } \varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi_{|\Sigma} = 0 \right\}$$

et $\tilde{y} \in \mathcal{H}$ tel que

$$\begin{cases} \tilde{y}(x,t) & = & 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \times]0,T], \\ \tilde{y}(x,0) & = & g \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On considère w_ε tel que

$$w_\varepsilon = y_\varepsilon - \tilde{y} \text{ dans } \overline{Q}, \tag{3.25}$$

on a

$$\begin{cases} -\varepsilon \dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} - \Delta w_\varepsilon & = & v & \text{dans} & Q, \\ w_\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ w_\varepsilon(T) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ w_\varepsilon(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases}$$

En multipliant l'équation d'état vérifiée par w_ε par une fonction test $z \in \mathcal{D}(Q)$, en intégrant sur Q et en utilisant la formule de Green, on a par densité

$$a_\varepsilon(w_\varepsilon, z) = \ell(z) \qquad \forall z \in H_0^1(Q) \tag{3.26}$$

avec

$$a_\varepsilon(w_\varepsilon, z) = \varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{L^2(Q)} + \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}, z \right)_{L^2(Q)} + (\nabla w_\varepsilon, \nabla z)_{L^2(Q)}$$

et

$$\ell(z) = (v, z)_{L^2(Q)}.$$

On obtient l'existence et l'unicité de w_ε en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans $H_0^1(Q)$ qui est un espace de Hilbert muni de la semi-norme de $H_0^1(Q)$. Ceci impliquera donc l'existence et l'unicité de w_ε solution de (3.1)-(3.3).

Il ne reste plus qu'à vérifier les hypothèses d'utilisation de ce théorème.

Il est évident que $a_\varepsilon(.,.)$ est bien une forme bilinéaire, continue, coercive sur $H_0^1(Q)$ et que $\ell(.)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(Q)$.

Donc $y_\varepsilon = w_\varepsilon + \tilde{y}$ existe et est unique.

■

On a les estimations a priori

Théorème 3.5 *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\eta > 0$*, il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $C_\eta > 0$ *telles que*

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} + \|y_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C, \tag{3.27}$$

$$\left\| \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(]0,T-\eta[;L^2(\Omega))} \leq C_\eta. \tag{3.28}$$

Démonstration - On utilise de nouveau w_ε défini par (3.25), on a

$$\left(-\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}-\Delta w_\varepsilon, w_\varepsilon\right)_{L^2(Q)}=(v,w_\varepsilon)_{L^2(Q)},$$

à l'aide de la formule de Green et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\left(\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt+\|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)}\leq\|v\|_{L^2(Q)}\|w_\varepsilon\|_{L^2(Q)}.$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $k>0$ telle que

$$\left(\varepsilon\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)}+\|w_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\right)\|w_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\leq k\|v\|_{L^2(Q)}\|w_\varepsilon\|_{L^2(Q)},$$

d'où, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)}+\|w_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\leq C. \tag{3.29}$$

Or $y_\varepsilon=w_\varepsilon+\tilde{y}$, l'inégalité triangulaire entraîne (3.27).

On part de l'équation $-\varepsilon\dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial t^2}+\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}=v+\Delta w_\varepsilon$ et on note $g_\varepsilon=v+\Delta w_\varepsilon$. D'après (3.29), g_ε demeure dans un borné de $L^2(Q)$.

On introduit une fonction $\varphi\in C^1([0,T])$ telle que $\varphi(0)=1$ et $\varphi(T)=0$, puis on multiplie

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}=g_\varepsilon$$

par $\varphi\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}$ et on intègre dans Q. Il vient

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^T\varphi\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^T\varphi\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt=\int_0^T\varphi\left(g_\varepsilon,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)}dt. \tag{3.30}$$

On a

$$\int_0^T\varphi\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt=-\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\int_0^T\frac{d\varphi}{dt}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt,$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^T\frac{d\varphi}{dt}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^T\varphi\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt=\int_0^T\varphi\left(g_\varepsilon,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)}dt.$$

Or le second terme est $O(1)$, donc

$$\int_0^T\varphi\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt=\int_0^T\varphi\left(g_\varepsilon,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)}dt+O(1).$$

Et on en déduit (3.28) à l'aide de l'inégalité triangulaire.

■

On n'a pas pour objectif de faire tendre le régularisé elliptique vers le problème (3.1)-(3.3).

Remarque 3.7 Lorsque $\varepsilon\longrightarrow 0$, la solution y_ε de (3.24) ne tend pas vers z solution du problème (3.1)-(3.3), mais vers la solution y du problème

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta\, y &= v \quad \text{dans} \quad Q,\\ \qquad y &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,\\ \quad y(0) &= g \quad \text{dans} \quad \Omega.\end{cases}$$

Remarque 3.8 Si $G=\{0\}$ alors $y_\varepsilon(0)$ est connu. Le système est alors à informations complètes. Le cas "sans informations" concernant la condition initiale correspond au cas où $G=L^2(\Omega)$.

Par régularisation elliptique, nous obtenons donc un système distribué de type elliptique à données manquantes que l'on peut analyser avec la notion de contrôle à moindres regrets.

3.2.2 Contrôle à moindres regrets du problème régularisé

Pour tout (v, g) fixé, il existe un état unique $y_\varepsilon(v, g)$ auquel on attache la fonction coût

$$J_\varepsilon(v, g) = \left\| y_\varepsilon(v, g) - z_d \right\|^2_{L^2(Q)} + N \left\| v \right\|^2_{L^2(Q)} \tag{3.31}$$

où $z_d \in L^2(Q)$ fixé et $N > 0$.
Comme nous renonçons au problème de contrôle standard, on cherche le contrôle sans regret pour le problème régularisé (3.1)-(3.3) qu'on appelle contrôle sans regret approché. Il s'agit alors de trouver $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}$ solution du problème

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \sup_{g \in G} \Big[J_\varepsilon(v, g) - J_\varepsilon(0, g) \Big]. \tag{3.32}$$

Lemme 3.4 *Le problème* (3.32) *est équivalent au problème*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \left(J_\varepsilon(v, 0) - J_\varepsilon(0, 0) + 2 \sup_{g \in G} \left\langle \varepsilon \frac{\partial \xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(0), g \right\rangle_{G', G} \right)$$

où $\xi_\varepsilon(v)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} L^*_\varepsilon \xi_\varepsilon(v) & = & y_\varepsilon(v, 0) & \textit{dans} & Q, \\ \xi_\varepsilon(v)(0) & = & 0 & \textit{dans} & \Omega, \\ \xi_\varepsilon(v)(T) & = & 0 & \textit{dans} & \Omega, \\ \xi_\varepsilon(v) & = & 0 & \textit{sur} & \Sigma, \end{cases} \tag{3.33}$$

avec $L_\varepsilon = -\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ et son adjoint $L^*_\varepsilon = -\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$.
De plus, le problème (3.32) *admet une solution unique appelée contrôle sans regret, dans l'ensemble*

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \left\{ v_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}; \left\langle \frac{\partial \xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(0), g \right\rangle_{G', G} = 0, \quad \forall\, g \in G \right\}.$$

Démonstration - Un calcul simple nous donne :

$$J_\varepsilon(v,g)-J_\varepsilon(0,g) = J_\varepsilon(v,0)-J_\varepsilon(0,0)+2\left(y_\varepsilon(v,0)\,,\,y_\varepsilon(0,g)\right)_{L^2(Q)} \;\forall\,(v,g)\in\mathcal{U}_{ad}\times G.$$

On introduit $\xi_\varepsilon(v)$ solution de (3.33). Et en utilisant la formule de Green on a :

$$\left(-\xi_\varepsilon(v)', y_\varepsilon(0,g)\right)_{L^2(Q)} = \left(\xi_\varepsilon(v), y_\varepsilon(0,g)'\right)_{L^2(Q)},$$

$$\left(-\varepsilon\xi_\varepsilon(v)'', y_\varepsilon(0,g)\right)_{L^2(Q)} = \left(\xi_\varepsilon(v), -\varepsilon y_\varepsilon(0,g)''\right)_{L^2(Q)} + \varepsilon\left\langle \xi_\varepsilon(v)'(0), g\right\rangle_{G',G}\ ,$$

$$\left(-\Delta\xi_\varepsilon(v),\, y_\varepsilon(0,g)\right)_{L^2(Q)} = \left(\xi_\varepsilon(v)\,,\, -\Delta y_\varepsilon(0,g)\right)_{L^2(Q)}.$$

On en déduit donc

$$\left(y_\varepsilon(v,0)\,,\,y_\varepsilon(0,g)\right)_{L^2(Q)} = \varepsilon\left\langle \xi_\varepsilon(v)'(0), g\right\rangle_{G',G}.$$

Par ailleurs, comme G est un espace vectoriel, le produit scalaire

$$\sup_{g\in G}\left\langle \frac{\partial\xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(0), g\right\rangle_{G',G}$$

admet un sens pour les seuls contrôles v tels que

$$\left\langle \frac{\partial\xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(0), g\right\rangle_{G',G} = 0 \quad \forall g\in G, \quad \forall\varepsilon>0.$$

■

On introduit ensuite, pour $\gamma > 0$, le contrôle à moindres regrets solution du problème perturbé :

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}}\sup_{g\in G}\left[J_\varepsilon(v,g) - J_\varepsilon(0,g) - \gamma\|g\|_G^2\right].$$

On obtient alors le problème de contrôle standard

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}}\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) \tag{3.34}$$

où

$$\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) = J_\varepsilon(v,0) - J_\varepsilon(0,0) + \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial \xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.35}$$

Lemme 3.5 *Le problème* (3.34) (3.35) *admet une solution unique* u_ε^γ*, appelée contrôle à moindres regrets approché.*

Démonstration - Comme $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble non vide et que $\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$ alors

$$d_\varepsilon^\gamma = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v)$$

existe.

Soit $(v_{\varepsilon_n}^\gamma)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_{ad}$ une suite minimisante telle que

$$d_\varepsilon^\gamma \leq \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v_{\varepsilon_n}^\gamma) < d_\varepsilon^\gamma + \frac{1}{n} < d_\varepsilon^\gamma + 1.$$

Il existe un nombre strictement positif $C_\varepsilon^\gamma > 0$ tel que

$$\|v_{\varepsilon_n}^\gamma\|_{L^2(Q)} < C_\varepsilon^\gamma \textit{ et } \|y(v_{\varepsilon_n}^\gamma, 0)\|_{L^2(Q)} < C_\varepsilon^\gamma.$$

On en déduit donc qu'il existe une suite extraite de $(v_{\varepsilon_n}^\gamma, y(v_{\varepsilon_n}^\gamma, 0))_n$, encore notée de la même façon, telle que lorsque n tend vers $+\infty$

$$(v_{\varepsilon_n}^\gamma, y(v_{\varepsilon_n}^\gamma, 0)) \rightharpoonup (u_\varepsilon^\gamma, z_\varepsilon^\gamma) \text{ faiblement dans } \mathcal{U}_{ad} \times L^2(Q)$$

car $\mathcal{U}_{ad}$ convexe implique que $\mathcal{U}_{ad}$ fortement fermé équivaut à $\mathcal{U}_{ad}$ faiblement fermé.

Et comme $y(v_{\varepsilon_n}^\gamma, 0)$ est solution du problème (3.1)-(3.3) pour le contrôle $v_{\varepsilon_n}^\gamma$ et l'incertitude $g = 0$, en multipliant l'équation d'état de ce problème par $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, on en déduit que

$$\left(L_\varepsilon y(v_{\varepsilon_n}^\gamma, 0), \varphi\right)_{L^2(Q)} = \left(y(v_{\varepsilon_n}^\gamma, 0), L_\varepsilon^* \varphi\right)_{L^2(Q)} = \left(v_{\varepsilon_n}^\gamma, \varphi\right)_{L^2(Q)}.$$

En passant à la limite, on obtient finalement

$$L_\varepsilon z_\varepsilon^\gamma = u_\varepsilon^\gamma \quad \text{dans} \quad Q.$$

Comme $u_\varepsilon^\gamma \in L^2(Q)$ alors $z_\varepsilon^\gamma{}_{|\Sigma}$, $z_\varepsilon^\gamma(0)$ et $z_\varepsilon^\gamma(T)$ ont bien un sens. Et, la continuité de l'application trace implique que
$z_\varepsilon^\gamma{}_{|\Sigma} = 0$, $z_\varepsilon^\gamma(0) = 0$ et $z_\varepsilon^\gamma(T) = 0$.

■

Nous dégageons maintenant le système d'optimalité du contrôle à moindres regrets approché pour le problème mal posé associé à l'équation de la chaleur régularisé.

Théorème 3.6 *Le contrôle à moindres regrets approché u_ε^γ est caractérisé par l'unique quintuplet $\{u_\varepsilon^\gamma, y_\varepsilon^\gamma, \rho_\varepsilon^\gamma, p_\varepsilon^\gamma, \xi_\varepsilon^\gamma\}$ solution du système :*

$$\begin{cases} L_\varepsilon y_\varepsilon^\gamma = u_\varepsilon^\gamma, & L_\varepsilon \rho_\varepsilon^\gamma = 0, & L_\varepsilon^* p_\varepsilon^\gamma = y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma, & L_\varepsilon^* \xi_\varepsilon^\gamma = y_\varepsilon^\gamma & \text{dans } Q, \\ y_\varepsilon^\gamma = 0, & \rho_\varepsilon^\gamma = 0, & p_\varepsilon^\gamma = 0, & \xi_\varepsilon^\gamma = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon^\gamma(0) = 0, & \rho_\varepsilon^\gamma(0) = \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(0), & p_\varepsilon^\gamma(0) = 0, & \xi_\varepsilon^\gamma(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y_\varepsilon^\gamma(T) = 0, & \rho_\varepsilon^\gamma(T) = 0, & p_\varepsilon^\gamma(T) = 0, & \xi_\varepsilon^\gamma(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et on a l'inégalité variationnelle

$$(\, p_\varepsilon^\gamma + N u_\varepsilon^\gamma, v - u_\varepsilon^\gamma \,) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} L_\varepsilon = -\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \text{ et } L_\varepsilon^* = -\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \text{ son opérateur adjoint;} \\ u_\varepsilon^\gamma,\ y_\varepsilon^\gamma,\ p_\varepsilon^\gamma,\ \rho_\varepsilon^\gamma \text{ et } \xi_\varepsilon^\gamma \ \in\ L^2(]0,T[; L^2(\Omega)). \end{array} \right.$$

Démonstration - Le raisonnement classique sur les conditions d'Euler de premier ordre pour le problème (3.34)(3.35) donne

$$(\, y_\varepsilon^\gamma - z_d, y_\varepsilon(v-u_\gamma, 0)\,)_{L^2(Q)} + N(\, u_\varepsilon^\gamma, v-u_\gamma\,)_{L^2(Q)} + (\, \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\xi_\varepsilon^{\gamma\prime}(0), \xi_\varepsilon(v-u_\gamma)'(0)\,)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.36}$$

où $y_\varepsilon^\gamma = y_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0)$, $\xi_\varepsilon^\gamma = \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0)$ et $w_\varepsilon^\gamma = v - u_\varepsilon^\gamma$.
On introduit maintenant $\rho_\varepsilon^\gamma = \rho_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0)$ solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\varepsilon\rho_\varepsilon^{\gamma\prime\prime} + \rho_\varepsilon^{\gamma\prime} - \Delta\rho_\varepsilon^\gamma & = & 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \\ \rho_\varepsilon^\gamma(T) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \rho_\varepsilon^\gamma(0) & = & \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\xi_\varepsilon^{\gamma\prime}(0) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \rho_\varepsilon^\gamma & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{array}\right. \tag{3.37}$$

en utilisant la formule de Green, on a

$$\varepsilon(\rho_\varepsilon^\gamma(0), \xi_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma)'(0))_{L^2(\Omega)} + (-\varepsilon\rho_\varepsilon^{\gamma\prime\prime} + \rho_\varepsilon^{\gamma\prime} - \Delta\rho_\varepsilon^\gamma, \xi_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma))_{L^2(Q)} = (\rho_\varepsilon^\gamma, -\varepsilon\xi_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma)'' - \xi_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma)' - \Delta\xi_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma))_{L^2(Q)},$$

ceci implique

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\xi_\varepsilon^{\gamma\prime}(0), \xi_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma)'(0)\right)_{L^2(\Omega)} = \left(\rho_\varepsilon^\gamma, y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0)\right)_{L^2(Q)}$$

l'inégalité (3.36) devient

$$\left(y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma, y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0)\right)_{L^2(Q)} + N\left(u_\varepsilon^\gamma, w_\varepsilon^\gamma\right)_{L^2(Q)} \geq 0. \tag{3.38}$$

On considère ensuite l'état adjoint $p_\varepsilon^\gamma = p_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0)$ qui vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\varepsilon p_\varepsilon^{\gamma\prime\prime} - p_\varepsilon^{\gamma\prime} - \Delta p_\varepsilon^\gamma & = & y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma & \text{dans} \quad Q, \\ \\ p_\varepsilon^\gamma(T) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ p_\varepsilon^\gamma(0) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ p_\varepsilon^\gamma & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma. \end{array}\right.$$

On a alors

$$(-\varepsilon p_\varepsilon^{\gamma\prime\prime} - p_\varepsilon^{\gamma\prime} - \Delta p_\varepsilon^\gamma, y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0))_{L^2(Q)} = (p_\varepsilon^\gamma, -\varepsilon y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0)'' + y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0)' - \Delta y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0))_{L^2(Q)}.$$

D'où

$$\left(y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma\, ,\, y_\varepsilon(w_\varepsilon^\gamma, 0)\right)_{L^2(Q)} = \left(p_\varepsilon^\gamma\, ,\, w_\varepsilon^\gamma\right)_{L^2(Q)}.$$

Enfin

$$\left(p_\varepsilon^\gamma + N u_\varepsilon^\gamma \,,\, w_\varepsilon^\gamma \right)_{L^2(Q)} \geq 0.$$

■

On s'intéresse aux estimations a priori.

Lemme 3.6 *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe deux constantes $C > 0$ et $C_\eta > 0$ telles que :*

$$\left\| u_\varepsilon^\gamma \right\|_{L^2(Q)} \leq C, \qquad \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \tag{3.39}$$

$$\left\| y_\varepsilon^\gamma \right\|_{L^2(Q)} \leq C, \qquad \left\| \frac{\partial y_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(]0,T-\eta[;H^{-1}(\Omega))} \leq C_\eta, \tag{3.40}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \rho_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} + \|\rho_\varepsilon^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \qquad \left\| \frac{\partial \rho_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(]0,T-\eta[;H^{-1}(\Omega))} \leq C_\eta, \tag{3.41}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial p_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} + \|p_\varepsilon^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \qquad \left\| \frac{\partial p_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(]\eta,T[;H^{-1}(\Omega))} \leq C_\eta, \tag{3.42}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} + \|\xi_\varepsilon^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \qquad \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(]\eta,T[;H^{-1}(\Omega))} \leq C_\eta. \tag{3.43}$$

Démonstration - Comme

$$\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(u_\varepsilon^\gamma) \leq \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad},$$

en particulier en prenant $v = 0$, on a $\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(u_\varepsilon^\gamma) \leq \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(0)$,
d'où

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0) - J_\varepsilon(0,0) + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(0) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(0) \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque $y_\varepsilon(0,0)(t,x) = \xi_\varepsilon(0)(t,x) = 0$ dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$, on a

$$\left\| y_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0) - z_d \right\|^2_{L^2(Q)} + N \left\| u_\varepsilon^\gamma \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(0) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\| z_d \right\|^2_{L^2(Q)},$$

on en déduit alors (3.39).
Les estimations (3.41), (3.42) et (3.43) s'obtiennent aisément par le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 3.5.

■

3.2.3 Système d'optimalité singulier

Maintenant, on considère que γ est fixé et on fait tendre ε vers 0. On obtient alors le :

Théorème 3.7 *Le contrôle à moindres regrets u^γ du problème (3.1)-(3.3) est caractérisé par l'unique $\{u^\gamma, y^\gamma, \rho^\gamma, p^\gamma, \xi^\gamma\}$ solution du système :*

$$\left\{ \begin{array}{llllllllllllll} Ly^\gamma & = & u^\gamma, & L\rho^\gamma & = & 0, & L^* p^\gamma & = & y^\gamma - z_d + \rho^\gamma, & L^*\xi^\gamma & = & y^\gamma & \textit{dans} & Q, \\ y^\gamma & = & 0, & \rho^\gamma & = & 0, & p^\gamma & = & 0, & \xi^\gamma & = & 0, & \textit{sur} & \Sigma, \\ y^\gamma(0) & = & 0, & \rho^\gamma(0) & = & \lambda^\gamma(0) & & & & & & & \textit{dans} & \Omega, \\ & & & & & & p^\gamma(T) & = & 0, & \xi^\gamma(T) & = & 0 & \textit{dans} & \Omega, \end{array} \right.$$

et on a l'inégalité variationnelle

$$(\, p^\gamma + N u^\gamma, v - u^\gamma \,) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \textit{ et } L^* = -\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \textit{ son opérateur adjoint;} \\ u^\gamma,\ y^\gamma,\ p^\gamma,\ \rho^\gamma,\ \xi^\gamma \ \in \ L^2(]0,T[; L^2(\Omega)), \quad \lambda^\gamma(0) \in \widetilde{G} \quad \textit{complété de } G \textit{ dans } L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Démonstration - D'après (3.39), (3.41), (3.42) et (3.43), on peut extraire des suites $(u^\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$, $(y^\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$, $\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\xi_\varepsilon(u^\gamma_\varepsilon)}{\partial t}(0)\right)_\varepsilon$, $(\rho^\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$, $(p^\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\xi^\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ des sous-suites notées de la même façon telles que :

$$\begin{array}{lcll} u^\gamma_\varepsilon & \rightharpoonup u^\gamma & \text{faiblement dans} & \mathcal{U}_{ad}, \\ y^\gamma_\varepsilon & \rightharpoonup y^\gamma & \text{faiblement dans} & L^2(Q), \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\xi_\varepsilon(u^\gamma_\varepsilon)}{\partial t}(0) & \rightharpoonup \lambda^\gamma(0) & \text{faiblement dans} & \widetilde{G}, \\ \rho^\gamma_\varepsilon & \rightharpoonup \rho^\gamma & \text{faiblement dans} & L^2(Q), \\ p^\gamma_\varepsilon & \rightharpoonup p^\gamma & \text{faiblement dans} & L^2(Q), \\ \xi^\gamma_\varepsilon & \rightharpoonup \xi^\gamma & \text{faiblement dans} & L^2(Q). \end{array} \tag{3.44}$$

Pour tout $\gamma > 0$ fixé, l'état adjoint p^γ_ε est aussi borné en ε et on obtient facilement le résultat.

■

Remarque 3.9 Dans le cas sans informations, ce qui correspond à $G = L^2(\Omega)$, le complété est $\widetilde{G} = L^2(\Omega)$.

3.2.4 Correcteur d'ordre 0

On s'affranchit de la condition (3.10) en remplaçant le contrôle standard par la notion de contrôle moindres regrets. Le prix à payer est la perte de l'information sur la donnée terminale $y^\gamma(T)$ et en toute généralité $y^\gamma(T) \neq 0$. Il est donc nécessaire d'introduire la notion de correcteur d'ordre 0.
On fait l'hypothèse de régularité

$$y^\gamma(T) \in H^1_0(\Omega),\ y^{\gamma\prime} \in L^2(Q). \tag{3.45}$$

On note

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in L^2(]0,T[; H^1_0(\Omega)) \text{ tel que } \varphi' \in L^2(Q)\},$$

et

$$\mathcal{V}_0 = \{\varphi \in \mathcal{V} \text{ tel que } \varphi(0) = 0,\ \varphi(T) = 0\}.$$

On dit qu'une fonction $\theta_\varepsilon^\gamma \in \mathcal{V}$ est un correcteur d'ordre 0 si

$$\left|\begin{array}{lcll} \varepsilon(\theta_\varepsilon^{\gamma\prime}, \varphi')_{L^2(Q)} + (\theta_\varepsilon^{\gamma\prime}, \varphi)_{L^2(Q)} + (\nabla\theta_\varepsilon^\gamma, \nabla\varphi)_{L^2(Q)} & = & \sqrt{\varepsilon}\,(g_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} & \forall\, \mathcal{V}_0, \\ \theta_\varepsilon^\gamma(T) + y^\gamma(T) & = & 0, & \end{array}\right. \tag{3.46}$$

où l'on suppose que

$$\|g_\varepsilon\|_{L^2(]0,T[;H^{-1}(\Omega))} \leq C. \tag{3.47}$$

On a alors le :

Théorème 3.8 *Soit $\theta_\varepsilon^\gamma$ un correcteur d'ordre 0 défini par (3.46)(3.47). On a alors :*

$$\|y_\varepsilon^\gamma - (y^\gamma + \theta_\varepsilon^\gamma)\|_{L^2(]0,T[;H_0^1)} \leq C\,\sqrt{\varepsilon} \tag{3.48}$$

et lorsque ε tend vers 0,

$$\frac{d}{dt}[y_\varepsilon^\gamma - (y^\gamma + \theta_\varepsilon^\gamma)] \longrightarrow 0 \quad \textit{dans} \quad L^2(Q) \textit{ faible.} \tag{3.49}$$

Démonstration - Si $w_\varepsilon^\gamma = y_\varepsilon^\gamma - (y^\gamma + \theta_\varepsilon^\gamma)$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(w_\varepsilon^{\gamma\prime}, \varphi')_{L^2(Q)} + (w_\varepsilon^{\gamma\prime}, \varphi)_{L^2(Q)} + (\nabla w_\varepsilon^\gamma, \nabla\varphi)_{L^2(Q)} = \\ -\,\varepsilon\,(y^{\gamma\prime}, \varphi')_{L^2(Q)} - \sqrt{\varepsilon}\,(g_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} \quad \forall\, \mathcal{V}_0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

En particulier si $\varphi = w_\varepsilon^\gamma$, en utilisant (3.45) et (3.47), on a

$$\varepsilon\|w_\varepsilon^{\gamma\prime}\|_{L^2(Q)}^2 + \|w_\varepsilon^\gamma\|_{L^2(Q)}^2 \leq C\,\sqrt{\varepsilon}\left[\sqrt{\varepsilon}\|w_\varepsilon^{\gamma\prime}\|_{L^2(Q)} + \|w_\varepsilon^\gamma\|_{L^2(Q)}\right],$$

on en déduit alors (3.48) et (3.49).

■

Calcul d'un correcteur

On définit $\varphi_\varepsilon^\gamma$ par :

$$\begin{cases} -\varepsilon \varphi_\varepsilon^{\gamma\prime\prime} + \varphi_\varepsilon^{\gamma\prime} &= 0, \\ \varphi_\varepsilon^\gamma(T) &= -y^\gamma(T), \end{cases}$$

$\varphi_\varepsilon^\gamma$ à décroissance aussi rapide que possible lorsque $t \to -\infty$,

d'où

$$\varphi_\varepsilon^\gamma(t) = -y^\gamma(T) e^{-\frac{T-t}{\varepsilon}}. \tag{3.51}$$

Si l'on suppose que $y^\gamma(T) \in H_0^1(\Omega)$, la fonction

$$\theta_\varepsilon^\gamma = m\varphi_\varepsilon^\gamma \qquad \left| \begin{array}{lll} m = 1 & \text{au voisinage de} & t = T, \\ m = 0 & \text{au voisinage de} & t = 0 \end{array} \right.$$

est un correcteur d'ordre 0.

On vérifie l'équation variationnelle ; le terme essentiel est

$$m\,\Delta\, y^\gamma(T)\, e^{-\frac{T-t}{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}\, h_\varepsilon^\gamma.$$

Sous les hypothèses faites, on a :

$$\int_0^T \|h_\varepsilon^\gamma\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \le C\,\varepsilon^{-1} \int_0^T e^{-\frac{2(T-t)}{\varepsilon}} dt = o(1).$$

3.3 Contrôle sans regret

Dans le cas où $G = L^2(\Omega)$, on obtient le résultat

Théorème 3.9 *Le contrôle sans regret u du problème (3.1)-(3.3) est caractérisé par l'unique $\{u, y, \rho, p, \xi\}$ solution du système :*

$$\begin{cases} Ly = u, & L\rho = 0, & L^*p = y - z_d + \rho, & L^*\xi = y & \textit{dans } Q, \\ y = 0, & \rho = 0, & p = 0, & \xi = 0, & \textit{sur } \Sigma, \\ y(0) = 0, & \rho(0) = \lambda(0) & & & \textit{dans } \Omega, \\ & & p(T) = 0, & \xi(T) = 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases}$$

et on a l'inégalité variationnelle

$$(\, p + Nu, v - u \,) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \textit{ et } L^* = -\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \textit{ son opérateur adjoint}; \\ u,\ y,\ p,\ \rho,\ \xi \ \in \ L^2(]0, T[; L^2(\Omega)), \quad \lambda(0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Démonstration - Lorsque ε tend vers 0, on a

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(0) \rightharpoonup \lambda^\gamma(0) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Alors

$$\|\lambda^\gamma(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf \left\| \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

d'où $\lambda^\gamma(0) \in L^2(\Omega)$.

De plus, ρ^γ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho^\gamma}{\partial t} - \Delta \rho^\gamma = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \rho^\gamma = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \rho^\gamma(0) = \lambda^\gamma(0) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

(et vérifie également $\rho^\gamma(T) = 0$), la régularité du problème de l'équation de la chaleur entraîne que

$$\|\rho^\gamma\|_{L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2(]0,T[;H^{-1}(\Omega))} \leq C.$$

On peut donc extraire des suites $(\lambda^\gamma(0))_\gamma$, $(\rho^\gamma)_\gamma$ des sous-suites notées de la même façon telles que :

$$\begin{array}{lcll} \lambda^\gamma(0) & \rightharpoonup & \lambda(0) & \text{faiblement dans} \quad L^2(Q), \\ \rho^\gamma & \rightharpoonup & \rho & \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \end{array} \tag{3.52}$$

Par compacité

$$\rho^\gamma \longrightarrow \rho \quad \text{fortement dans} \quad L^2(Q). \tag{3.53}$$

De la même façon, puisque

$$u_\varepsilon^\gamma \rightharpoonup u^\gamma \text{ faiblement dans } \mathcal{U}_{ad},$$

on en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq \liminf \|u_\varepsilon^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C$$

et la régularité du problème de l'équation de la chaleur implique alors

$$\begin{array}{lcll} u^\gamma & \rightharpoonup & u & \text{faiblement dans} \quad \mathcal{U}_{ad}, \\ y^\gamma & \longrightarrow & y & \text{fortement dans} \quad L^2(Q), \\ p^\gamma & \longrightarrow & p & \text{fortement dans} \quad L^2(Q), \\ \xi^\gamma & \longrightarrow & \xi & \text{fortement dans} \quad L^2(Q). \end{array} \tag{3.54}$$

On obtient donc le résultat.

∎

Chapitre 4

Contrôle d'un problème couplé mal posé

Le chapitre 4 est consacré au contrôle d'un problème couplé mal posé associé à l'équation de la chaleur.
Dans un premier temps, on s'assure que l'ensemble des couples admissibles de ce problème est non vide. On reprend ensuite la méthode de pénalisation afin de caractériser le couple optimal. On y parvient en emmettant une hypothèse de type Slater.
Dans un second temps, on propose la notion de contrôle sans regret. Pour ce faire, on applique la notion de contrôle à moindres regrets au problème régularisé de type elliptique.

4.1 Contrôle optimal

4.1.1 Préliminaires et notations

Le problème auquel on s'intéresse, consiste à trouver $(z_1, z_2) \in \left(L^2(Q)\right)^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} + \Delta\, z_1 - z_2 & & & = & v_1 & \text{dans} & Q, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} - \Delta\, z_2 + z_1 & & & = & v_2 & \text{dans} & Q, \\ z_1 & = & z_2 & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z_1(0) & = & z_2(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

où $(v_1, v_2) \in \left(L^2(Q)\right)^2$.

Les conditions aux limites et initiales du problème (4.1) ont bien un sens, il suffit pour le voir de procéder de la même façon que pour la démonstration du lemme 3.1 .

Lemme 4.1 *L'état* $z = (z_1, z_2)$ *du problème* (4.1) *vérifie*

$$z_2 \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.3}$$

Remarque 4.1 Soient

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\varphi_1 \in L^2(Q) \text{ tel que } \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \Delta\varphi_1 \in L^2(Q),\ \varphi_1(0) = 0 \text{ et } \varphi_1|_{\Sigma} = 0\right\}$$

et

$$\mathcal{F}_2 = \left\{\varphi_2 \in L^2(Q) \text{ tel que } \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \Delta\varphi_2 \in L^2(Q),\ \varphi_2(0) = 0 \text{ et } \varphi_2|_{\Sigma} = 0\right\}.$$

La structure du problème (4.1) montre que les états $z = (z_1, z_2)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Ce problème est mal posé car pour tout $(v_1, v_2) \in \left(L^2(Q)\right)^2$, l'existence d'une solution n'est pas assurée dans $\left(L^2(Q)\right)^2$.

Lemme 4.2 *Le problème* (4.1) *admet une solution unique pour un ensemble de fonctions* (v_1, v_2) *dense dans* $\left(L^2(Q)\right)^2$.

Démonstration - En prenant v_1 et v_2 deux éléments de $L^2(]0,T[) \otimes E$ c'est-à-dire de la forme $v_1(x,t) = g_1(t)w(x)$ et $v_2(x,t) = g_2(t)w(x)$, avec g_1 et $g_2 \in L^2(]0,T[)$ et $w \in E$ (E donné par (3.8)), et en cherchant une solution de la forme $(z_1, z_2) = (\zeta_1(t)w(x), \zeta_2(t)w(x))$, on trouve que le problème (4.1) s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcll} \zeta_1'' + (1-\lambda^2)\zeta_1 & = & \lambda g_1 + g_2 + g_1' & \text{dans} \quad]0,T[, \\ \zeta_2 & = & \zeta_1' - \lambda\zeta_1 - g_1 & \text{dans} \quad]0,T[, \\ \zeta_1(0) & = & 0, & \\ \zeta_1'(0) & = & g_1(0). & \end{array}\right.$$

Cela définit bien (z_1, z_2) qui est unique.

∎

On se propose maintenant de mettre le problème (4.1) sous une forme matricielle.
On définit la matrice d'opérateurs

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta & -I_d \\ I_d & \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \end{pmatrix}$$

telle que, pour tout $z = (z_1, z_2) \in \left(L^2(Q)\right)^2$,

$$\mathcal{A}z = \left(\frac{\partial z_1}{\partial t} + \Delta\, z_1 - z_2\ ,\ \frac{\partial z_2}{\partial t} - \Delta\, z_2 + z_1\right).$$

Alors le problème (4.1) peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \mathcal{A}\, z & = & v & \text{dans} & Q, \\ z & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{4.4}$$

avec $v = (v_1, v_2)$.

Définition 4.1 On dit qu'un couple (v, z) est admissible si, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\left| \begin{array}{l} v_i \in \mathcal{U}_{ad}, \\ z_i \in L^2(Q) \text{ tel que } z \text{ vérifie le problème (4.4).} \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{Y}_{ad}$ l'ensemble des couples admissibles.

Remarque 4.2 Pour l'instant, on suppose implicitement que l'ensemble $\mathcal{Y}_{ad}$ est non vide. Par la suite, on emettra l'(les) hypothèse(s) nécessaire(s) pour que cela ait lieu.

Pour tout espace de Hilbert X, on note $(X)^2$ le produit cartésien de X par lui-même et on définit sur $X \times X$ le produit scalaire

$$\langle\, (a, b)\, ,\, (\bar{a}, \bar{b})\, \rangle_{X \times X} = \langle\, a\, ,\, \bar{a}\, \rangle_X + \langle\, b\, ,\, \bar{b}\, \rangle_X \tag{4.5}$$

et on lui associe la norme

$$\left\| (a, b) \right\|_{X \times X} = \sqrt{\left\| a \right\|_X^2 + \left\| b \right\|_X^2}\, . \tag{4.6}$$

Soit la fonction coût

$$\mathcal{J}(v, z) = \frac{1}{2} \left\| z - z_d \right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2} + \frac{N}{2} \left\| v \right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2} \tag{4.7}$$

où $z_d = (z_{d_1}, z_{d_2}) \in \left(L^2(Q)\right)^2$ et $N \in \mathbb{R}_+^*$.
Le problème de contrôle optimal qui nous intéresse est : trouver $u = (u_1, u_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ tel que

$$\mathcal{J}(u, y) = \inf_{(v,z)\in\mathcal{Y}_{ad}} \mathcal{J}(v, z). \tag{4.8}$$

De façon similaire à la démonstration du théorème 3.2, on a

Théorème 4.1 *Le problème de contrôle optimal* (4.8) *admet une unique solution* (u, y) *appelée couple optimal.*

4.1.2 Méthode de pénalisation

Afin de "traiter" l'équation d'état comme une contrainte, on ajoute à la fonction coût J le facteur de pénalisation

$$\frac{1}{2\varepsilon} \left\|\mathcal{A}z - v\right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2},$$

où le nombre $\varepsilon > 0$ est destiné à tendre vers 0. Ce procédé est utilisé ici pour obtenir le système d'optimalité singulier (S.O.S.).
On introduit donc la fonction coût pénalisée

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v, z) = \mathcal{J}(v, z) + \frac{1}{2\varepsilon} \left\|\mathcal{A}z - v\right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2}, \tag{4.9}$$

pour $(v, z) \in \left(L^2(Q)\right)^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, et on considère le problème

$$\inf_{(v,z)\,\in\,\left(\mathcal{U}_{ad}\right)^2\times(\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2)} \mathcal{J}_\varepsilon(v, z). \tag{4.10}$$

Théorème 4.2 *Il existe un unique couple* $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *solution du problème* (4.10). *De plus, le couple* $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *est caractérisé par les égalités suivantes :*

$$(p_\varepsilon, \mathcal{A}z)_{\left(L^2(Q)\right)^2} = (y_\varepsilon - z_d, z)_{\left(L^2(Q)\right)^2} \quad \forall z \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \tag{4.11}$$

$$(p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\left(L^2(Q)\right)^2} \geq 0 \qquad \forall v \in \left(\mathcal{U}_{ad}\right)^2, \tag{4.12}$$

avec $p_\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\mathcal{A}y_\varepsilon - u_\varepsilon\right).$

Démonstration - Après avoir vérifié que

$$d_\varepsilon = \inf_{(v,z)\,\in\,\left(\mathcal{U}_{ad}\right)^2\times(\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2)} \mathcal{J}_\varepsilon(v,z)$$

existe bien, comme borne inférieure d'une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$, on considère une suite minimisante $(v_n, z_n)_n \subset (\mathcal{U}_{ad})^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ i.e.

$$d_\varepsilon \leq \mathcal{J}_\varepsilon(v_n, z_n) \leq d_\varepsilon + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Il existe alors une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\|v_n\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} < C_\varepsilon, \quad \|z_n\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} < C_\varepsilon \quad \text{et} \quad \|\mathcal{A}z_n - v_n\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} < C_\varepsilon.$$

On peut donc extraire de (v_n, z_n) une suite, notée de la même façon et il existe u_ε, y_ε et h_ε tels que

$$\begin{array}{rcll} v_n & \rightharpoonup & u_\varepsilon & \text{dans } \left(L^2(Q)\right)^2 \text{ faible,} \\ z_n & \rightharpoonup & y_\varepsilon & \text{dans } \left(L^2(Q)\right)^2 \text{ faible,} \\ \mathcal{A}z_n - v_n & \rightharpoonup & h_\varepsilon & \text{dans } \left(L^2(Q)\right)^2 \text{ faible.} \end{array}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(Q) \times \mathcal{D}(Q)$, on a

$$(\mathcal{A}z_n - v_n, \varphi)_{\left(L^2(Q)\right)^2} = (z_n, \mathcal{A}^*\varphi)_{\left(L^2(Q)\right)^2} - (v_n, \varphi)_{L^2(Q)\times L^2(Q)}$$

en passant à la limite, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q) \times \mathcal{D}(Q)$

$$(h_\varepsilon, \varphi)_{\left(L^2(Q)\right)^2} = (y_\varepsilon, \mathcal{A}^*\varphi)_{\left(L^2(Q)\right)^2} - (u_\varepsilon, \varphi)_{\left(L^2(Q)\right)^2},$$

d'où

$$\mathcal{A}y_\varepsilon - u_\varepsilon = h_\varepsilon \quad \text{dans} \;\; Q.$$

On en déduit que

$$\mathcal{A}z_n - v_n \rightharpoonup \mathcal{A}y_\varepsilon - u_\varepsilon \text{ dans } \left(L^2(Q)\right)^2 \text{ faible,}$$

or $\Delta \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); H^{-2}(\Omega))$ implique que

$$\frac{\partial z_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \times L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \text{ faible.}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} z_n(0) &\rightharpoonup y_\varepsilon(0) \quad && \text{dans } \ H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \text{ faible,} \\ z_n|_\Sigma &\rightharpoonup y_\varepsilon|_\Sigma && \text{dans } \ H^{-1}(]0,T[;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \times H^{-1}(]0,T[;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \text{ faible,} \end{aligned}$$

d'où

$$y_\varepsilon(0) = 0 \qquad \textit{et} \qquad z_n|_\Sigma = 0.$$

Donc $\liminf \mathcal{J}_\varepsilon(v_n, z_n) \geq \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ avec $(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in (\mathcal{U}_{ad})^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, ce qui montre que $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est solution de (4.10).
(4.11)(4.12) se déduisent des conditions nécessaires d'Euler satisfaites par $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ solution de (4.10) :

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(v - u_\varepsilon), y_\varepsilon)_{|\lambda=0} \geq 0 \quad \forall v \in (\mathcal{U}_{ad})^2$$

et

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda z)_{|\lambda=0} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2.$$

■

On étudie ensuite la convergence de ce procédé.

Théorème 4.3 *Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a*

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{dans} \quad \left(L^2(Q)\right)^2, \tag{4.13}$$

$$y_\varepsilon \longrightarrow y \quad \textit{dans} \quad \left(L^2(Q)\right)^2. \tag{4.14}$$

Démonstration - Etant donné que $\mathcal{Y}_{ad} \subset (\mathcal{U}_{ad})^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf_{(\mathcal{U}_{ad})^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)} \mathcal{J}_\varepsilon(v, z) \leq \mathcal{J}_\varepsilon(u, y) = \mathcal{J}(u, y), \tag{4.15}$$

il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^2} < C, \quad \|u_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^2} < C \tag{4.16}$$

et

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{A} y_\varepsilon - u_\varepsilon) \right\|_{(L^2(Q))^2} < C. \tag{4.17}$$

On déduit de (4.17) que

$$\begin{cases} \mathcal{A} y_\varepsilon &= u_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon \quad \text{dans} \quad Q, \\ y_\varepsilon &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ y_\varepsilon(0) &= 0 \qquad\qquad\quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

avec $\|f_\varepsilon\|_{(L^2(Q))^2} < C$.

Et (4.16) implique qu'on peut extraire de $(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ une sous-suite, notée de la même manière, telle que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{dans} \ \left(L^2(Q)\right)^2 \ \text{faible}, \\ y_\varepsilon &\rightharpoonup \tilde{y} \quad \text{dans} \ \left(L^2(Q)\right)^2 \ \text{faible}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(Q) \times \mathcal{D}(Q)$

$$(\mathcal{A} y_\varepsilon, \varphi)_{(L^2(Q))^2} = (y_\varepsilon, \mathcal{A}^* \varphi)_{(L^2(Q))^2} = (u_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon, \varphi)_{(L^2(Q))^2},$$

en passant à la limite, on a

$$(\tilde{y}, \mathcal{A}^* \varphi)_{(L^2(Q))^2} = (\tilde{u}, \varphi)_{(L^2(Q))^2},$$

d'où

$$\mathcal{A} \tilde{y} = \tilde{u} \quad \text{dans } Q.$$

Comme $\tilde{u} \in \Big(L^2(Q)\Big)^2$, par un procédé similaire à la démonstration du théorème 4.2, on montre que $(\tilde{u}, \tilde{y}) \in \mathcal{Y}_{ad}$.
(4.15) et (4.18) implique

$$\mathcal{J}(u,y) \leq \mathcal{J}(\tilde{u},\tilde{y}) \leq \liminf \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \limsup \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \mathcal{J}(u,y).$$

par conséquent

$$\tilde{u} = u, \quad \tilde{y} = y \quad et \quad \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{J}(u,y).$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon - z_d\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} &\longrightarrow \|y - z_d\|_{\left(L^2(Q)\right)^2}, \\ \|u_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} &\longrightarrow \|u\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

On déduit donc de (4.18) et (4.19) la convergence forte dans (4.13) et (4.14).

■

On considère maintenant la fonction coût pénalisée

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v,z) = \mathcal{J}(v,z) + \frac{1}{2\varepsilon}\|\mathcal{A}z - v\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2} \tag{4.20}$$

et on se propose de trouver $u_\varepsilon = (u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2})$ et $y_\varepsilon = (y_{\varepsilon 1}, y_{\varepsilon 2})$ tel que

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf_{(v,z)\,\in\,(\mathcal{U}_{\mathrm{ad}})^2\times(\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2)} \mathcal{J}_\varepsilon(v,z). \tag{4.21}$$

On a facilement le résultat,

Lemme 4.3 *Il existe un unique couple* $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *solution du problème* (4.10).

Théorème 4.4 *La solution* $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *du problème* (4.21) *est caractérisée par la donnée du triplet* $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *solution de :*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}\,y_\varepsilon & = & u_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon & dans & Q, \\ \mathcal{A}^*\,p_\varepsilon & = & y_\varepsilon - z_d & dans & Q, \\ y_\varepsilon = p_\varepsilon & = & 0 & sur & \Sigma, \\ y_\varepsilon(0) = p_\varepsilon(0) & = & 0 & dans & \Omega \end{array}\right. \tag{4.22}$$

et des inégalités variationnelles

$$\left| \begin{array}{lll} (p_{\varepsilon 1} + N u_{\varepsilon 1}, v_1 - u_{\varepsilon 1})_{\left(L^2(Q)\right)^2} & \geq 0 & \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}, \\ (p_{\varepsilon 2} + N u_{\varepsilon 2}, v_2 - u_{\varepsilon 2})_{\left(L^2(Q)\right)^2} & \geq 0 & \forall v_2 \in \mathcal{U}_{ad}. \end{array} \right. \tag{4.23}$$

où

$$p_\varepsilon = (p_{\varepsilon 1}, p_{\varepsilon 2}), \ \|f_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} < C \quad et \quad \mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta & I_d \\ -I_d & -\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \end{pmatrix}.$$

Démonstration - On a $\mathcal{Y}_{ad} \subset (\mathcal{U}_{\text{ad}})^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, ceci implique

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf_{(v,z) \in (\mathcal{U}_{\text{ad}})^2 \times (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)} \mathcal{J}_\varepsilon(v, z) \leq \mathcal{J}_\varepsilon(u, y) = \mathcal{J}(u, y).$$

Il existe alors une constante $C > 0$ telle que $\left\| \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\mathcal{A} y_\varepsilon - u_\varepsilon) \right\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} < C$, on a bien

$$\mathcal{A}\, y_\varepsilon = u_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon \quad \text{avec} \quad \|f_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} < C. \tag{4.24}$$

Le couple $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ vérifie les conditions nécessaires du premier ordre d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_{\varepsilon 1} + \lambda z_1, y_{\varepsilon 2}) - \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda} = 0 \qquad \forall \ z_1 \in \mathcal{F}_1 , \tag{4.25}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_{\varepsilon 1}, y_{\varepsilon 2} + \lambda z_2) - \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda} = 0 \qquad \forall \ z_2 \in \mathcal{F}_2 , \tag{4.26}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(u_{\varepsilon 1} + \lambda(v_1 - u_{\varepsilon 1}), u_{\varepsilon 2}, y_\varepsilon) - \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda} \geq 0 \qquad \forall \ v_1 \in \mathcal{U}_{\text{ad}}, \tag{4.27}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2} + \lambda(v_2 - u_{\varepsilon 2}), y_\varepsilon) - \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda} \geq 0 \qquad \forall \ v_2 \in \mathcal{U}_{\text{ad}}. \tag{4.28}$$

L'équation (4.25) équivaut à

$$(y_{\varepsilon 1} - z_{d1}, z_1)_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_{\varepsilon 1}}{\partial t} + \Delta y_{\varepsilon 1} - y_{\varepsilon 2} - u_{\varepsilon 1}, \frac{\partial z_1}{\partial t} + \Delta z_1\right)_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_{\varepsilon 2}}{\partial t} - \Delta y_{\varepsilon 2} + y_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}, z_1\right)_{L^2(Q)} = 0 \quad \forall z_1 \in \mathcal{F}_1$$

et en posant

$$p_{\varepsilon 1} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_{\varepsilon 1}}{\partial t} + \Delta y_{\varepsilon 1} - y_{\varepsilon 2} - u_{\varepsilon 1}\right) \text{ et } p_{\varepsilon 2} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_{\varepsilon 2}}{\partial t} - \Delta y_{\varepsilon 2} + y_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}\right),$$

on a

$$\left(p_{\varepsilon 1}, \frac{\partial z_1}{\partial t} + \Delta z_1\right)_{L^2(Q)} + (p_{\varepsilon 2}, z_1)_{L^2(Q)} = (y_{\varepsilon 1} - z_{d1}, z_1)_{L^2(Q)} \quad \forall z_1 \in \mathcal{F}_1. \tag{4.29}$$

Pour $z_1 \in \mathcal{D}(Q)$, on trouve

$$-\frac{\partial p_{\varepsilon 1}}{\partial t} + \Delta p_{\varepsilon 1} + p_{\varepsilon 2} = y_{\varepsilon 1} - z_{d1} \quad \text{dans } Q.$$

En multipliant ensuite cette dernière équation par $z_1 \in \mathcal{F}_1$ et en utilisant la formule de Green, on en déduit que

$$p_{\varepsilon 1} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \text{ et } \quad p_{\varepsilon 1}(0) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

De la même façon, (4.26) implique

$$\left(p_{\varepsilon 2}, \frac{\partial z_2}{\partial t} - \Delta z_2\right)_{L^2(Q)} - (p_{\varepsilon 1}, z_2)_{L^2(Q)} = (y_{\varepsilon 2} - z_{d2}, z_2)_{L^2(Q)} \quad \forall z_2 \in \mathcal{F}_2, \tag{4.30}$$

d'où

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_{\varepsilon 2}}{\partial t} - \Delta\, p_{\varepsilon 2} - p_{\varepsilon 1} &= y_{\varepsilon 2} - z_{d2} & \text{dans} & Q, \\ p_{\varepsilon 2} &= 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ p_{\varepsilon 2}(T) &= 0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases}$$

D'où $p_\varepsilon = (p_{\varepsilon 1}, p_{\varepsilon 2})$ vérifie

$$\begin{cases} \mathcal{A}^* p_\varepsilon &= y_\varepsilon - z_d & \text{dans} & Q, \\ p_\varepsilon &= 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ p_\varepsilon(T) &= 0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases}$$

On déduit de l'inégalité (4.27)

$$N\,(\,u_{\varepsilon 1}\,,\,v_1-u_{\varepsilon 1}\,)_{L^2(Q)}-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_{\varepsilon 1}}{\partial t}+\Delta y_{\varepsilon 1}-y_{\varepsilon 2}-u_{\varepsilon 1}\,,\,v_1-u_{\varepsilon 1}\right)_{L^2(Q)}\geq 0\quad \forall v_1\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}},$$

par conséquent, on a bien l'inégalité variationnelle

$$(\,p_{\varepsilon 1}+Nu_{\varepsilon 1}\,,\,v_1-u_{\varepsilon 1}\,)_{L^2(Q)}\geq 0,\quad \forall v_1\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}.$$

De la même manière, (4.28) équivaut à

$$(\,p_{\varepsilon 2}+Nu_{\varepsilon 2}\,,\,v_2-u_{\varepsilon 2}\,)_{L^2(Q)}\geq 0,\quad \forall v_2\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}.$$

système d'optimalité singulier

Tout d'abord, on donne un résultat de convergence forte qui s'obtient aisément en procédant de la même manière que pour la démonstration du théorème 4.3.

Lemme 4.4 *Lorsque $\varepsilon\longrightarrow 0$, on a*

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad dans \quad \left(L^2(Q)\right)^2, \tag{4.31}$$

$$y_\varepsilon \longrightarrow y \quad dans \quad \left(L^2(Q)\right)^2. \tag{4.32}$$

On aborde maintenant le point essentiel qui consiste à trouver des estimations a priori sur p_ε.

Lemme 4.5 *On suppose que $\mathcal{U}_{ad}$ est d'intérieur non vide. Alors il existe une constante $C>0$ telle que*

$$\|p_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2}\leq C. \tag{4.33}$$

Démonstration - D'après le lemme 4.2 et l'hypothèse sur $\mathcal{U}_{ad}$, il existe $v_0 \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$ et $r > 0$ tels que $\|v - v_0\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq r$ implique $v \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$ et, il existe z_0 solution de (4.4) lorsque $v = v_0$.
On remarque qu'on peut écrire

$$\langle\, p_\varepsilon + N u_\varepsilon \,,\, v - u_\varepsilon \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = X_\varepsilon + \langle\, p_\varepsilon \,,\, v - v_0 \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \tag{4.34}$$

où

$$X_\varepsilon = \langle\, p_\varepsilon + N u_\varepsilon \,,\, v_0 - u_\varepsilon \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} + \langle\, N u_\varepsilon \,,\, v - v_0 \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2}.$$

En prenant $z = z_0$ dans (4.29) et (4.30), on a

$$\langle\, p_\varepsilon \,,\, v_0 \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, y_\varepsilon - z_d \,,\, z_0 \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2}$$

et en prenant $z = y_\varepsilon$, à l'aide de (4.24), il vient

$$\langle\, p_\varepsilon \,,\, u_\varepsilon \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, y_\varepsilon - z_d \,,\, y_\varepsilon \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} + \|f_\varepsilon\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2}.$$

Ceci entraîne

$$\langle\, p_\varepsilon \,,\, v_0 - u_\varepsilon \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, y_\varepsilon - z_d \,,\, z_0 - y_\varepsilon \,\rangle_{L^2(Q)\times L^2(Q)} + \|f_\varepsilon\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2}$$

alors il existe une constante $C > 0$ telle que $|X_\varepsilon| \leq C$. En utilisant (4.23) et (4.34), on a

$$\langle\, p_\varepsilon \,,\, v - v_0\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \geq -C \quad \forall\, v \;\text{ tel que }\; \|v - v_0\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq r. \tag{4.35}$$

En particulier, pour tout v tel que $\|v - v_0\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} = r$, on peut choisir une fonction $\varphi \in \left(L^2(Q)\right)^2$ telle que

$$v - v_0 = \pm\, r\, \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{\left(L^2(Q)\right)^2}}$$

et on trouve à l'aide de (4.35) que

$$\left| \left\langle p_\varepsilon \, , \, r \, \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{\left(L^2(Q)\right)^2}} \right\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \right| \leq C \quad \forall\, \varphi \in \left(L^2(Q)\right)^2,$$

c'est-à-dire que

$$\left| \langle \, p_\varepsilon \, , \, \varphi \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \right| \leq \frac{C}{r} \|\varphi\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \quad \forall\, \varphi \in \left(L^2(Q)\right)^2.$$

Mais, comme $L^2(Q)$ est identifié à son dual et que

$$\left| \langle \, p_\varepsilon \, , \, \varphi \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \right| \leq \|p_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \|\varphi\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \quad \forall\, \varphi \in \left(L^2(Q)\right)^2,$$

on en déduit que

$$\|p_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq \frac{C}{r}.$$

Théorème 4.5 *On suppose que $\mathcal{U}_{ad}$ est d'intérieur non vide. Le couple optimal (u, y) du problème (4.8) est caractérisé par le triplet $(u, y, p) \in (\mathcal{U}_{ad})^2 \times \left(L^2(Q)\right)^2 \times \left(L^2(Q)\right)^2$, solution de*

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \mathcal{A}\, y & = & u & \textit{dans} & Q, \\ \mathcal{A}^*\, p & = & y - z_d & \textit{dans} & Q, \\ y = p & = & 0 & \textit{sur} & \Sigma, \\ y(0) = p(T) & = & 0 & \textit{dans} & \Omega, \end{array} \right. \tag{4.36}$$

et des inégalités variationnelles

$$\left| \begin{array}{lll} (p_1 + N u_1, v_1 - u_1)_{L^2(Q)} & \geq 0 & \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}, \\ (p_2 + N u_2, v_2 - u_2)_{L^2(Q)} & \geq 0 & \forall v_2 \in \mathcal{U}_{ad}. \end{array} \right. \tag{4.37}$$

où $p_\varepsilon = (p_1, p_2)$.

Démonstration - D'après le lemme 4.5, on peut extraire de la suite $(p_\varepsilon)_\varepsilon$ une sous-suite, notée de la même façon, telle que

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p = (p_1, p_2) \quad \text{dans} \quad \Big(L^2(Q)\Big)^2 \quad \text{faible.}$$

Et, du lemme 4.4, on a

$$\begin{array}{rcl} u_\varepsilon & \longrightarrow & u \quad \text{dans} \ \Big(L^2(Q)\Big)^2, \\ y_\varepsilon & \longrightarrow & y \quad \text{dans} \ \Big(L^2(Q)\Big)^2. \end{array}$$

On multiplie l'équation d'état du problème adjoint approché par $\varphi \in \mathcal{D}(Q) \times \mathcal{D}(Q)$, on obtient

$$\langle\, \mathcal{A}^* p_\varepsilon \,,\, \varphi \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, p_\varepsilon \,,\, \mathcal{A}\varphi \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, y_\varepsilon - z_d \,,\, \varphi \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2},$$

et en passant à la limite

$$\langle\, p \,,\, \mathcal{A}\varphi \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, y - z_d \,,\, \varphi \,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2},$$

d'où

$$\mathcal{A}^* p = y - z_d \quad \text{dans} \ \ Q.$$

Comme $y - z_d \in \Big(L^2(Q)\Big)^2$ et $\Delta \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); H^{-2}(\Omega))$, cela implique que

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(0,T; H^{-2}(\Omega)) \times L^2(0,T; H^{-2}(\Omega)) \text{ faible.}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcll} p_\varepsilon(T) & \rightharpoonup & p(T) & \text{dans} \ \ H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \text{ faible,} \\ p_{\varepsilon|_\Sigma} & \rightharpoonup & p_{|_\Sigma} & \text{dans} \ \ H^{-1}(]0,T[; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \times H^{-1}(]0,T[; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \text{ faible,} \end{array}$$

d'où

$$p(T) = 0 \qquad et \qquad p_{|_\Sigma} = 0.$$

En partant de (4.24) et en procédant de la même manière, on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}\, y & = & u \ \text{dans} & Q, \\ y & = & 0 \ \ \text{sur} & \Sigma, \\ y(0) & = & 0 \ \text{dans} & \Omega. \end{array} \right.$$

4.2 Contrôle à moindres regrets

On rappelle le problème couplé étudié consiste à trouver $(z_1, z_2) \in \left(L^2(Q)\right)^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} + \Delta z_1 - z_2 & = & v_1 & \text{dans} & Q, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} - \Delta z_2 + z_1 & = & v_2 & \text{dans} & Q, \\ z_1 \quad = \quad z_2 & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z_1(0) \quad = \quad z_2(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega \end{array}\right. \tag{4.38}$$

où $(v_1, v_2) \in \left(L^2(Q)\right)^2$.

En utilisant la méthode mixte explicitée dans la section précédente, on se donne pour objectif de trouver un S.O.S. associé au contrôle optimal du problème (4.38). Tout d'abord, on régularise ce problème couplé de type parabolique afin d'obtenir un problème de type elliptique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le régularisé elliptique consistant à trouver $(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon}) \in \left(L^2(Q)\right)^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \varepsilon \dfrac{\partial^2 y_{1\varepsilon}}{\partial t^2} + \dfrac{\partial y_{1\varepsilon}}{\partial t} + \Delta y_{1\varepsilon} - y_{2\varepsilon} & = & v_1 & \text{dans} & Q, \\ -\varepsilon \dfrac{\partial^2 y_{2\varepsilon}}{\partial t^2} + \dfrac{\partial y_{2\varepsilon}}{\partial t} - \Delta y_{2\varepsilon} + y_{1\varepsilon} & = & v_2 & \text{dans} & Q, \\ y_{1\varepsilon} \quad = \quad y_{2\varepsilon} & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y_{1\varepsilon}(0) \quad = \quad y_{2\varepsilon}(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ y_{1\varepsilon}(T) = g_1, \quad y_{2\varepsilon}(T) = g_2 & & & \text{dans} & \Omega \end{array}\right. \tag{4.39}$$

où $(g_1, g_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Remarque 4.3 Pour tout $g \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ fixé, le problème (4.39) admet une unique solution $(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})$.

Soient $A_{1\varepsilon}$ et $A_{2\varepsilon}$ deux opérateurs tels que

$$\left| \begin{array}{lcl} A_{1\varepsilon} & = & \varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta\,, \\ A_{2\varepsilon} & = & -\;\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\,. \end{array} \right.$$

On définit l'opérateur matriciel

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{1\varepsilon} & -I_d \\ I_d & A_{2\varepsilon} \end{pmatrix}$$

tel que, pour tout $z_\varepsilon = (z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}) \in \Big(L^2(Q)\Big)^2$,

$$\mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon = \big(A_{1\varepsilon} z_{1\varepsilon} - z_{2\varepsilon}\ ,\ A_{2\varepsilon} z_{2\varepsilon} + z_{1\varepsilon}\big).$$

Le problème (4.39) équivaut alors à trouver $y_\varepsilon = (y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \mathcal{A}_\varepsilon y_\varepsilon & = & v & \text{dans} & Q, \\ y_\varepsilon & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y_\varepsilon(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ y_\varepsilon(T) & = & g & \text{dans} & \Omega \end{array} \right. \tag{4.40}$$

avec $g = (g_1, g_2)$ et $v = (v_1, v_2)$.

C,

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout g, on peut alors associé au problème (4.40) une fonction coût définie par :

$$J_\varepsilon(v, g) = \Big\| y_\varepsilon(v, g) - z_d \Big\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2} + N \Big\| v \Big\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2}. \tag{4.41}$$

On introduit la solution du problème perturbé :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}_{\text{ad}}} \Big[\sup_{g \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Big(J_\varepsilon(v, g) - J_\varepsilon(0, g) - \gamma \|g\|^2_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Big) \Big]. \tag{4.42}$$

Lemme 4.6 *Le problème (4.42) admet une unique solution* $u_\varepsilon^\gamma = (u_{1\varepsilon}^\gamma, u_{2\varepsilon}^\gamma)$ *appelé contrôle à moindres regrets "approché".*
De plus, u_ε^γ *est l'unique solution du problème de contrôle classique :*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) \tag{4.43}$$

avec

$$\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) = J_\varepsilon(v,0) - J_\varepsilon(0,0) + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(T) \right\|^2_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \tag{4.44}$$

$\xi_\varepsilon(v) = (\xi_{1\varepsilon}(v), \xi_{2\varepsilon}(v)) \in \left(L^2(Q)\right)^2$ *défini par :*

$$\left\{ \begin{array}{rclll} \mathcal{A}_\varepsilon^* \xi_\varepsilon(v) & = & y_\varepsilon(v,0) & dans & Q, \\ \xi_\varepsilon(v) & = & 0 & sur & \Sigma \\ \xi_\varepsilon(v)(0) & = & 0 & dans & \Omega, \\ \xi_\varepsilon(v)(T) & = & 0 & dans & \Omega \end{array} \right. \tag{4.45}$$

et $\mathcal{A}_\varepsilon^*$ *l'opérateur matriciel adjoint de* $\mathcal{A}_\varepsilon$*.*

Démonstration : On a bien sûr l'existence et l'unicité du contrôle à moindres regrets "approché". La linéarité du problème (4.39) nous permet d'obtenir l'égalité

$$J_\varepsilon(v,g) - J_\varepsilon(0,g) = J_\varepsilon(v,0) - J_\varepsilon(0,0) + 2\langle\, y_\varepsilon(v,0)\,,\, y_\varepsilon(0,g)\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2}.$$

On définit l'opérateur matriciel adjoint $\mathcal{A}_\varepsilon^*$ par

$$\mathcal{A}_\varepsilon^* = \begin{pmatrix} A_{1\varepsilon}^* & I_d \\ -I_d & A_{2\varepsilon}^* \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{rcrl} A_{1\varepsilon}^* & = & & \varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta, \\ A_{2\varepsilon}^* & = & - & \varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\,. \end{array} \right.$$

On introduit maintenant la fonction ξ_ε vérifiant (4.45). Alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_\varepsilon^* \xi_\varepsilon(v)\,,\, y_\varepsilon(0,g) \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} &= \langle \mathcal{A}_\varepsilon^* \left(\xi_{1\varepsilon}(v), \xi_{2\varepsilon}(v)\right)\,,\, \left(y_{1\varepsilon}(0,g), y_{2\varepsilon}(0,g)\right) \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \\
&= \langle A_{1\varepsilon}^* \xi_{1\varepsilon}(v) + \xi_{2\varepsilon}(v)\,,\, y_{1\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)} + \\
&\quad \langle A_{2\varepsilon}^* \xi_{2\varepsilon}(v) - \xi_{1\varepsilon}(v)\,,\, y_{2\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\begin{aligned}
\langle A_{1\varepsilon}^* \xi_{1\varepsilon}(v) + \xi_{2\varepsilon}(v)\,,\, y_{1\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)} &= \langle \xi_{1\varepsilon}(v)\,,\, A_{1\varepsilon}^* y_{1\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)} + \langle \xi_{2\varepsilon}(v)\,,\, y_{1\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)} \\
&\quad + \varepsilon \langle \xi_{1\varepsilon}(v)'(T)\,,\, y_{1\varepsilon}(0,g)(T) \rangle_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle A_{2\varepsilon}^* \xi_{2\varepsilon}(v) - \xi_{1\varepsilon}(v)\,,\, y_{2\varepsilon}(0,g) \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} &= \langle \xi_{2\varepsilon}(v)\,,\, A_{2\varepsilon}^* y_{2\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)} - \langle \xi_{1\varepsilon}(v)\,,\, y_{2\varepsilon}(0,g) \rangle_{L^2(Q)} \\
&\quad - \varepsilon \langle \xi_{2\varepsilon}(v)'(T)\,,\, y_{2\varepsilon}(0,g)(T) \rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\langle y_\varepsilon(v,0)\,,\, y_\varepsilon(0,g) \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle \varepsilon \xi_{1\varepsilon}(v)'(T)\,,\, g_1 \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \varepsilon \xi_{2\varepsilon}(v)'(T)\,,\, g_2 \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

A l'aide de la propriété de la polaire, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\sup_{g \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Big(\langle 2\varepsilon \left(\xi_{1\varepsilon}(v)'(T), -\xi_{2\varepsilon}(v)'(T) \right)\,,\, g \rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \quad -\gamma \|g\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Big) \\
&\qquad = \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(T) \right\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\inf_{v \in \mathcal{U}_{\rm ad}\times\mathcal{U}_{\rm ad}} \Big[\sup_{g \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Big(J_\varepsilon(v,g) - J_\varepsilon(0,g) - \gamma \|g\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Big) \Big] \\
&= \inf_{v \in \mathcal{U}_{\rm ad}\times\mathcal{U}_{\rm ad}} \Big[J_\varepsilon(v,0) - J_\varepsilon(0,0) + \sup_{g \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Big(\langle 2\varepsilon \left(\xi_{1\varepsilon}(v)'(T), -\xi_{2\varepsilon}(v)'(T) \right)\,,\, g \rangle - \gamma \|g\|^2 \Big) \Big] \\
&= \inf_{v \in \mathcal{U}_{\rm ad}\times\mathcal{U}_{\rm ad}} \left[J_\varepsilon(v,0) - J_\varepsilon(0,0) + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \left\| \frac{\partial \xi_\varepsilon(v)}{\partial t}(T) \right\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \right].
\end{aligned}$$

■

On donne maintenant le système d'optimalité pour le problème approché.

Théorème 4.6 *Le contrôle à moindres regrets "approché" u_ε^γ est caractérisé par la donnée de l'unique $\{u_\varepsilon^\gamma, y_\varepsilon^\gamma, \xi_\varepsilon^\gamma, \rho_\varepsilon^\gamma, p_\varepsilon^\gamma\}$ solution du problème :*

$$\left\{\begin{array}{lllllllllllll} \mathcal{A}_\varepsilon y_\varepsilon^\gamma & = & u_\varepsilon^\gamma, & \mathcal{A}_\varepsilon^* \xi_\varepsilon^\gamma & = & y_\varepsilon^\gamma, & \mathcal{A}_\varepsilon \rho_\varepsilon^\gamma & = & 0, & \mathcal{A}_\varepsilon^* p_\varepsilon^\gamma & = & y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma & \textit{dans} \quad Q, \\ y_\varepsilon^\gamma & = & 0, & \xi_\varepsilon^\gamma & = & 0, & \rho_\varepsilon^\gamma & = & 0, & p_\varepsilon^\gamma & = & 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ y_\varepsilon^\gamma(0) & = & 0, & \xi_\varepsilon^\gamma(0) & = & 0, & \rho_\varepsilon^\gamma(0) & = & 0, & p_\varepsilon^\gamma(0) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ y_\varepsilon^\gamma(T) & = & 0, & \xi_\varepsilon^\gamma(T) & = & 0, & \rho_\varepsilon^\gamma(T) & = & \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\chi_\varepsilon^\gamma, & p_\varepsilon^\gamma(T) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega \end{array}\right.$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\langle\, p_\varepsilon^\gamma + N u_\varepsilon^\gamma, v - u_\varepsilon^\gamma \,\rangle \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$$

avec $\chi_\varepsilon^\gamma = \left(\dfrac{\partial \xi_{1\,\varepsilon}^\gamma}{\partial t}(T)\,,\, -\dfrac{\partial \xi_{2\,\varepsilon}^\gamma}{\partial t}(T) \right).$

Démonstration : On note $w = v - u_\varepsilon^\gamma$ pour $v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$. La condition nécessaire d'Euler du premier ordre appliquée au problème (4.43)(4.44) s'écrit

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(u_\varepsilon^\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(u_\varepsilon^\gamma)}{\lambda} \geq 0 \qquad \forall\ v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}. \tag{4.46}$$

La condition (4.46) donne

$$\langle\, y_\varepsilon^\gamma - z_d, y_\varepsilon(w,0)\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} + N\langle\, u_\varepsilon^\gamma, w\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} + \left\langle\, \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\frac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(T), \frac{\partial \xi_\varepsilon(w)}{\partial t}(T)\,\right\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \geq 0$$

où $y_\varepsilon^\gamma = y_{1\varepsilon}(u_\varepsilon^\gamma, 0)$ et $\xi_\varepsilon^\gamma = \xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0) = (\xi_{1\,\varepsilon}^\gamma, \xi_{2\,\varepsilon}^\gamma)$.
On introduit $\rho_\varepsilon^\gamma = \rho_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{lllll} \mathcal{A}_\varepsilon \rho_\varepsilon^\gamma & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ \rho_\varepsilon^\gamma & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \rho_\varepsilon^\gamma(0) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \rho_\varepsilon^\gamma(T) & = & \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\left(\dfrac{\partial \xi_{1\,\varepsilon}^\gamma}{\partial t}(T)\,,\, -\dfrac{\partial \xi_{2\,\varepsilon}^\gamma}{\partial t}(T) \right) & \text{dans} & \Omega. \end{array}\right.$$

A l'aide de la formule de Green, on obtient

$$\left\langle \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\frac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(T), \frac{\partial \xi_\varepsilon(w)}{\partial t}(T) \right\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \langle\, \rho_\varepsilon^\gamma, y_\varepsilon(w,0)\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2}.$$

Maintenant, on définit l'état adjoint $p_\varepsilon^\gamma = p_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma, 0)$ solution du problème

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\varepsilon^* p_\varepsilon^\gamma &=& y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma & \text{dans} & Q, \\ p_\varepsilon^\gamma &=& 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ p_\varepsilon^\gamma(0) &=& 0 & \text{dans} & \Omega, \\ p_\varepsilon^\gamma(T) &=& 0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases}$$

Et, on déduit de la formule de Green

$$\langle\, y_\varepsilon^\gamma - z_d + \rho_\varepsilon^\gamma\,,\, y_\varepsilon(w,0)\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} = \langle\, p_\varepsilon^\gamma\,,\, w\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2}$$

d'où

$$\langle\, p_\varepsilon^\gamma + N u_\varepsilon^\gamma\,,\, w\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \geq 0.$$

■

Dans le but de trouver le S.O.S caractérisant le contrôle à moindres regrets, on s'intéresse alors aux estimations a priori. On a la proposition

Proposition 4.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive C telle que*

$$\|u_\varepsilon^\gamma\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq C, \qquad \|y_\varepsilon^\gamma\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq C, \qquad \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\left\|\frac{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(T)\right\|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C. \tag{4.47}$$

Démonstration - Puisque

$$\mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(u_\varepsilon^\gamma) \leq \mathcal{J}_\varepsilon^\gamma(v) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}\times\mathcal{U}_{ad},$$

en particulier en prenant $v=0$, on a

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma,0)-J_\varepsilon(0,0)+\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial\xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial\xi_\varepsilon(0)}{\partial t}(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

Mais, comme $y_\varepsilon(0,0)(t,x)=\xi_\varepsilon(0)(t,x)=0\ \ \forall(t,x)\in\overline{Q}$, alors

$$\begin{aligned}\left\|y_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma,0)-z_d\right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2}&+N\left\|u_\varepsilon^\gamma\right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2}\\&+\left\|\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\xi_\varepsilon^\gamma}{\partial t}(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq\left\|z_d\right\|^2_{\left(L^2(Q)\right)^2},\end{aligned}\tag{4.48}$$

d'où le résultat avec $C=\left\|z_d\right\|_{\left(L^2(Q)\right)^2}$.

■

Théorème 4.7 *Le contrôle à moindres regrets* $u^\gamma=\lim\limits_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon^\gamma$ *pour le problème couplé (4.38) est caractérisé par l'unique solution* $\{u^\gamma,y^\gamma,\xi^\gamma,\rho^\gamma,p^\gamma\}$ *du problème*

$$\begin{cases}\mathcal{A}y^\gamma=u^\gamma,\qquad \mathcal{A}^*\xi^\gamma=y^\gamma,\qquad \mathcal{A}\rho^\gamma=0,\\ \qquad\mathcal{A}^*p^\gamma=y^\gamma-z_d+\rho^\gamma & \textit{dans } Q,\\ \\ y^\gamma=0,\quad \xi^\gamma=0,\quad \rho^\gamma=0,\quad p^\gamma=0 & \textit{sur }\ \Sigma,\\ \\ y_2^\gamma(0)=0,\ \xi_1^\gamma(0)=0,\ \rho_2^\gamma(0)=0,\ p_1^\gamma(0)=0,\\ \\ y_1^\gamma(T)=0,\ \xi_2^\gamma(T)=0,\ \rho_1^\gamma(T)=\lambda_1^\gamma(T),\ p_2^\gamma(T)=0 & \textit{dans } \Omega,\end{cases}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\langle\, p^\gamma+Nu^\gamma,v-u^\gamma\,\rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2}\geq0\qquad\forall v\in\mathcal{U}_{ad}\times\mathcal{U}_{ad}.$$

De plus, on a les limites faibles suivantes :

$$y^\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon^\gamma \quad , \xi^\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} \xi_\varepsilon^\gamma \quad , \rho^\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon^\gamma \quad , p^\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon^\gamma,$$

où

$$u^\gamma,\ y^\gamma,\ p^\gamma,\ \rho^\gamma,\ \xi^\gamma\ \in\ \left(L^2(Q)\right)^2\ \ et\ \lambda^\gamma(T)\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega).$$

Démonstration - De (4.47), on déduit qu'on peut extraire des suites $(u_\varepsilon^\gamma)_\varepsilon$, $(y_\varepsilon^\gamma)_\varepsilon$ et $\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\dfrac{\partial\xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(T)\right)_\varepsilon$ des sous-suites encore notées de la même façon telle que

$$\begin{array}{rcll} u_\varepsilon^\gamma & \rightharpoonup & u^\gamma & \text{faiblement dans } \left(L^2(Q)\right)^2, \\ y_\varepsilon^\gamma & \rightharpoonup & y^\gamma & \text{faiblement dans } \left(L^2(Q)\right)^2, \\ \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\dfrac{\partial\xi_\varepsilon(u_\varepsilon^\gamma)}{\partial t}(T) & \rightharpoonup & \lambda^\gamma(T) & \text{faiblement dans } L^2(\Omega)\times L^2(\Omega). \end{array}$$

De plus, le S.O.S. trouvé au théorème 4.6 montre que ξ_ε^γ, ρ_ε^γ et p_ε^γ sont bornés car ils sont les solutions de problèmes bien posés.

D'où, comme précédemment, on peut extraire des ces suites des sous-suites notées de la même manière telles que

$$\begin{array}{lcll} \xi_\varepsilon^\gamma & \rightharpoonup & \xi^\gamma & \text{faiblement dans } \left(L^2(Q)\right)^2, \\ \rho_\varepsilon^\gamma & \rightharpoonup & \rho^\gamma & \text{faiblement dans } \left(L^2(Q)\right)^2 \\ \text{et} & & & \\ p_\varepsilon^\gamma & \rightharpoonup & p^\gamma & \text{faiblement dans } \left(L^2(Q)\right)^2. \end{array}$$

Puisque $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble fermé de $L^2(Q)$, on a même

$$u_\varepsilon^\gamma \rightharpoonup u^\gamma \quad \text{faiblement dans } \mathcal{U}_{ad}\times\mathcal{U}_{ad}.$$

■

Remarque 4.4 On a une "perte" d'informations en passant à la limite, la notion de correcteur d'ordre 0 est à envisager comme dans le cas de l'équation de la chaleur rétrograde.

4.3 Contrôle sans regret

Il s'agit maintenant de faire γ tendre vers 0 et on obtient alors le système d'optimalité singulier du contrôle sans regret.

Théorème 4.8 *Le contrôle sans regret* $u = \lim\limits_{\gamma \to 0} u^\gamma$ *pour le problème couplé (4.38) est caractérisé par l'unique solution* $\{u, y, \xi, \rho, p\}$ *du problème*

$$\begin{cases} \mathcal{A}y = u, \qquad \mathcal{A}^*\xi = y, \qquad \mathcal{A}\rho^\gamma = 0, \\ \qquad \mathcal{A}^*p = y - z_d + \rho \qquad\qquad \text{dans } Q, \\ \\ y = 0, \quad \xi = 0, \quad \rho = 0, \quad p = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \\ \\ y_2(0) = 0, \ \xi_1(0) = 0, \ \rho_2(0) = 0, \ p_1(0) = 0, \\ \\ y_1(T) = 0, \ \xi_2(T) = 0, \ \rho_1(T) = \lambda_1(T), \ p_2(T) = 0 \ \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\langle p + Nu, v - u \rangle_{\left(L^2(Q)\right)^2} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}.$$

De plus, on a les limites faibles suivantes :

$$y = \lim_{\gamma \to 0} y^\gamma \quad , \xi = \lim_{\gamma \to 0} \xi^\gamma \quad , \rho = \lim_{\gamma \to 0} \rho^\gamma \quad , p = \lim_{\gamma \to 0} p^\gamma,$$

où

$$u, \ y, \ p, \ \rho, \ \xi \ \in \left(L^2(Q)\right)^2 \ \text{et } \lambda(T) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Démonstration - Lorsque ε tend vers 0, on a

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\xi_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial t}(T) \rightharpoonup \lambda^\gamma(T) \text{ faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^2.$$

Alors

$$\|\lambda^\gamma(T)\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^2} \leq \liminf \left\|\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\xi_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial t}(T)\right\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^2} \leq C,$$

d'où $\lambda^\gamma(T) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$.

De plus, ρ^γ vérifie

$$\begin{cases} \mathcal{A}\rho^\gamma &= 0 & \text{dans} & Q, \\ \rho^\gamma &= 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \rho_2^\gamma(0) &= 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \rho_1^\gamma(T) &= \lambda^\gamma(T) & \text{dans} & \Omega, \end{cases}$$

la régularité du problème de l'équation de la chaleur entraîne que

$$\|\rho^\gamma\|_{\left(L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega))\right)^2} + \left\|\frac{\partial\rho^\gamma}{\partial t}\right\|_{\left(L^2(]0,T[;H^{-1}(\Omega))\right)^2} \leq C.$$

On peut donc extraire des suites $(\lambda^\gamma(T))_\gamma$, $(\rho^\gamma)_\gamma$ des sous-suites notées de la même façon telles que :

$$\begin{aligned} \lambda^\gamma(T) &\rightharpoonup \lambda(T) \quad \text{faiblement dans} \quad \left(L^2(\Omega)\right)^2, \\ \rho^\gamma &\rightharpoonup \rho \quad \text{faiblement dans} \quad \left(L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\right)^2, \end{aligned} \tag{4.49}$$

Par compacité

$$\rho^\gamma \longrightarrow \rho \quad \text{fortement dans} \quad \left(L^2(Q)\right)^2. \tag{4.50}$$

De la même façon, puisque

$$u_\varepsilon^\gamma \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad},$$

on en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u^\gamma\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq \liminf \|u^\gamma_\varepsilon\|_{\left(L^2(Q)\right)^2} \leq C$$

et la régularité du problème de l'équation de la chaleur implique alors

$$\begin{array}{llll} u^\gamma & \rightharpoonup & u & \text{faiblement dans} \quad \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}, \\ y^\gamma & \longrightarrow & y & \text{fortement dans} \quad \left(L^2(Q)\right)^2, \\ p^\gamma & \longrightarrow & p & \text{fortement dans} \quad \left(L^2(Q)\right)^2, \\ \xi^\gamma & \longrightarrow & \xi & \text{fortement dans} \quad \left(L^2(Q)\right)^2. \end{array} \tag{4.51}$$

On obtient donc le résultat.

■

Chapitre 5

Contrôle d'un système à données manquantes contrôlé à zéro

Dans ce chapitre, on s'intèresse au contrôle d'un problème issu de la contrôlabilité à zéro d'un système à données manquantes associé à l'équation de la chaleur.

5.1 Position du problème

Le système à données manquantes étudié consiste à trouver $y \in L^2(Q)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y & = & v + \theta.1_\omega & \text{dans} \quad Q, \\ y & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) & = & g & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{5.1}$$

où $v \in L^2(Q)$, $g \in G$ sous espace vectoriel fermé non vide de $L^2(\Omega)$, ω est un ouvert de Ω et 1_ω est l'indicatrice sur ω.

Si $\theta \in L^2(0,T;L^2(\omega))$, le problème (5.1) admet une solution unique vérifiant $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
Pour v, θ et g choisis, le problème (5.1) admet une solution unique

$$y = y(v,\theta,g). \tag{5.2}$$

Le problème de contrôlabilité pour (5.1) est de trouver θ tel que pour (v,g) donné, la solution y du problème (5.1) vérifie

$$y(T) = 0. \tag{5.3}$$

Supposons avoir sélectionné par un critère donné une et une seule solution du problème (5.1)(5.3).
On note y_θ cette solution unique.
On considère la fonction coût

$$J_\rho^\theta(v,g) = \|\rho[y_\theta(v,g) - z_d]\|^2_{L^2(Q)} + N\|\rho v\|^2_{L^2(Q)}$$

et on met en évidence deux problèmes qui nous semblent nouveaux.

Problème 1 : Si $\mathbf{G} = \{\mathbf{0}\}$

$y(0) = 0$ est connu, le système (5.1) (5.3) est alors à information complètes et $J_\rho^\theta(v,g) = J_\rho^\theta(v,0)$.
Un problème standard de contrôle est de chercher

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J_\rho^\theta(v,0).$$

Problème 2 : Si $\mathbf{G} \neq \{\mathbf{0}\}$

Le problème

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J_\rho^\theta(v,g)$$

n'a pas de sens. On examine alors le problème du point de vue du contrôle à moindres regrets.

L'étude de ces deux problèmes est l'objet de ce chapitre.

5.2 Contrôlabilité à zéro

Pour tout (v, g) fixé, la contrôlabilité à zéro du problème (5.1) consiste à trouver $\theta \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que si y est solution de (5.1) alors

$$y(T) = 0. \tag{5.4}$$

La contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur a été étudié par de nombreux auteurs tel que E. Zuazua [26], D. Russell [24], G. Lebeau-L.Robbiano [10] et J.P. Puel [22]. Nous rappelons ici la méthode variationnelle qui s'adapte bien au problème que nous avons en vue.

5.2.1 Méthode variationnelle

On considère l'opérateur L et son adjoint L^* définis par

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \ et \ L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta.$$

On a

Lemme 5.1 *Il existe une fonction "poids" ρ de classe C^2 sur Q telle que $\frac{1}{\rho}$ soit borné dans Q et il existe une constante $C = C(\Omega, T, \omega, \rho) > 0$ telle que*

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\rho^2}|q|^2 \, dxdt + \int_\Omega |q(0)|^2 dx \leq C \left[\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\rho^2}|L^* q|^2 \, dxdt + \int_0^T \int_\omega \frac{1}{\rho^2}|q|^2 \, dxdt \right] \tag{5.5}$$

$\forall q \in \mathcal{V}$.

Le résultat découle d'une inégalité de Carleman globale [22]. Ce lemme est le résultat fondamental de la méthode variationnelle.

Le second membre de (5.5) amène à considérer l'espace $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ q \in C^\infty \left(\overline{\Omega} \times [0, T] \right) \text{tel que } q_{|\Sigma} = 0 \right\},$$

muni de la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie pour $p, q \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$

$$a(p,q) = \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\rho^2} L^* p \; L^* q \; dxdt + \int_0^T \int_\omega \frac{1}{\rho^2} p \; q \; dxdt. \qquad (5.6)$$

Lemme 5.2 *L'application $(p,q) \longmapsto a(p,q)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.*

Démonstration - Puisque $\frac{1}{\rho}$ est borné, l'application $(p,q) \longmapsto a(p,q)$ est bien définie. Elle est bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{V}$. Montrons qu'elle est définie positive.
Soit donc $p \in \mathcal{V}$ tel que $a(p,p) = 0$. Alors d'après (5.5) (5.6), on a

$$p = 0 \text{ dans } Q.$$

La propriété $a(p,p) = 0 \Longrightarrow p = 0$ dans Q est appelée propriété de continuation unique.

$\blacksquare$

On note $\| \; \|_a$ la norme sur $\mathcal{V}$ associée au produit scalaire $a(\; , \;)$,

$$\|q\|_a = \sqrt{a(q,q)}.$$

Soit alors V le complété de $\mathcal{V}$ pour cette norme. V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $a(p,q)$ et la norme associée. De plus $\mathcal{V}$ est dense dans V.
Soit maintenant l'application ℓ définie sur V par

$$\langle \ell, q \rangle = \int_0^T \int_\Omega v \; q \; dxdt + \int_\Omega g \; q(0) \; dx.$$

Lemme 5.3 *On suppose que $v \in L^2(Q)$ avec $\rho v \in L^2(Q)$. Alors l'application ℓ est une forme linéaire continue sur V.*

Démonstration - Il est clair que ℓ est linéaire D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(Q)$

$$|\ell(q)| \leq \int_0^T \int_\Omega |v\,\rho\,\frac{1}{\rho}\,q|\,dxdt + \int_\Omega |g\,q(0)|\,dx \leq \|\rho v\|_{L^2(Q)} \left\|\frac{1}{\rho}\,q\right\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\|q(0)\|_{L^2(\Omega)},$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz discret dans $\mathbb{R}^2$

$$|\ell(q)| \leq \left(\left\|\frac{1}{\rho}\,q\right\|^2_{L^2(Q)} + \|q(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\rho v\|^2_{L^2(Q)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut alors à l'aide du lemme 5.1 pour obtenir

$$|\ell(q)| \leq C\,\sqrt{a(q,q)} = C\,\|q\|_a \quad \text{avec } C = \left(\|\rho v\|^2_{L^2(Q)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Le résultat qui suit est une application directe du théorème de Lax-Milgram.

Théorème 5.1 *On suppose que* $\|\rho v\|_{L^2(Q)} < +\infty$. *Alors il existe un unique* $\widetilde{p} \in V$ *solution du problème :*

$$\begin{cases} \widetilde{p} \in V \\ a(\widetilde{p}, q) = \ell(q) \quad \forall q \in V. \end{cases} \tag{5.7}$$

On aborde maintenant le résultat qui résoud le problème de contrôlabilité à zéro.

Théorème 5.2 *On suppose que* $\|\rho v\|_{L^2(Q)} < +\infty$. $\widetilde{p}$ *étant la solution unique du problème* (5.7), *on pose*

$$y = \frac{1}{\rho^2} L^* \widetilde{p} \tag{5.8}$$

et

$$\theta = -\frac{1}{\rho^2}\widetilde{p}.1_\omega. \tag{5.9}$$

Alors le couple $\{y, \theta\}$ *est solution du problème* (5.1) (5.4).

Démonstration - Sachant que $\widetilde{p} \in V$, on a déjà

$$\frac{1}{\rho}L^*\widetilde{p} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et } \frac{1}{\rho}\widetilde{p} \in L^2(0,T;L^2(\omega)). \tag{5.10}$$

et comme $\dfrac{1}{\rho}$ est borné, alors

$$\left|\begin{array}{l} \theta \in L^2(0,T;L^2(\omega)), \\ y \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right.$$

De plus, (5.7), (5.8) et (5.9) impliqueent

$$\int_0^T \int_\Omega y\ L^*q\ dxdt - \int_0^T \int_\omega \theta\ q\ dxdt = \int_0^T \int_\Omega v\ q\ dxdt + \int_\Omega g\ q(0)\ dx \quad \forall q \in V. \tag{5.11}$$

En particulier pour $q \in \mathcal{D}(Q)$, on a

$$Ly = v + \theta.1_\omega \text{ dans } Q. \tag{5.12}$$

Comme $v + \theta.1_\omega \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, alors $Ly \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Comme par ailleurs $y \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\Delta y \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, on peut donner un sens à la trace de y sur Σ. On a alors

$$y_{|\Sigma} \in H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

De plus, on a

$$\left|\begin{array}{l} y \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)), \end{array}\right.$$

donc $y \in C([0,T]; H^{-2}(\Omega))$ et on peut donner un sens à $y(0)$ et $y(T)$ dans $H^{-2}(\Omega)$.
On peut donc multiplier (5.12) par une fonction q régulière et appliquer la formule de Green pour obtenir grâce à (5.19)

$$(y(T), q(T))_{L^2(\Omega)} - (y(0) - g, q(0))_{L^2(\Omega)} + \left(y, \frac{\partial q}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma)} = 0,$$

donc

$$y_{|_\Sigma} = 0, \ y(0) = g \ et \ y(T) = 0 \ dans \ \Omega.$$

■

En résumé et pour conclure cette première partie, on vient de voir que pour tout couple (v, g) avec $v \in L^2(Q)$ tel que $\rho v \in L^2(Q)$ et $g \in L^2(\Omega)$, il existe $y = y(v, g)$ et $\theta = \theta(v, g)$ définies en (5.8) et (5.9) respectivement solution du problème (5.1) (5.4). On définit ainsi deux applications

$$\left\{ \begin{array}{ccc} L^2(Q) \times L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(0,T; L^2(\omega)) \\ (v,g) & \longmapsto & \theta(v,g) \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{ccc} L^2(Q) \times L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(Q) \\ (v,g) & \longmapsto & y(v,g). \end{array} \right.$$

On étudie maintenant quelques propriétés de ces deux applications.

5.2.2 Propriétés

Lemme 5.4 *Les applications $(v, g) \longmapsto \theta(v, g)$ et $(v, g) \longmapsto y(v, g)$ sont linéaires de $L^2(Q) \times L^2(\Omega)$ respectivement à valeurs dans $L^2(0, T; L^2(\omega))$ et dans $L^2(Q)$.*

Démonstration - La linéarité de ces applications découle de la linéarité de l'application $(v, g) \longmapsto \widetilde{p}(v, g)$, de la linéarité de l'opérateur L^* et des formules

(5.8) (5.9).

■

Dans toute la suite, pour $\mu \in C^2$ et $E \subset Q$, on note

$$\left(L^2(E), \mu dxdt\right) = \left\{f \;/\; \|\mu f\|_{L^2(E)} < +\infty\right\}.$$

Lemme 5.5 *Les applications* $v \longmapsto \theta(v,0)$ *et* $v \longmapsto y(v,0)$ *sont continues sur* $\left(L^2(Q), \rho dxdt\right)$ *respectivement à valeurs dans* $\left(L^2(0,T;L^2(\omega)), \rho dxdt\right)$ *et dans* $\left(L^2(Q), \rho dxdt\right)$.

Démonstration - Tout d'abord, remarquons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\|\frac{1}{\rho}\,\widetilde{p}(v,0)\right\|_{L^2(Q)} \leq C\|\rho v\|_{L^2(Q)}. \tag{5.13}$$

En effet d'après (5.5) et (5.7)

$$\left\|\frac{1}{\rho}\,\widetilde{p}(v,0)\right\|^2_{L^2(Q)} \leq C\; a(\widetilde{p}(v,0), \widetilde{p}(v,0)) = C\ell(\widetilde{p}(v,0)),$$

or

$$\ell(\widetilde{p}(v,0)) = (v, \widetilde{p}(v,0))_{L^2(Q)} \leq \|\rho v\|_{L^2(Q)} \left\|\frac{1}{\rho}\,\widetilde{p}(v,0)\right\|_{L^2(Q)}$$

d'où (5.13).

En prenant $q = \widetilde{p}(v,0)$, on déduit de (5.7), (5.8) et (5.9) l'égalité

$$\|\rho y(v,0)\|^2_{L^2(Q)} + \|\rho\theta(v,0)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))} = \left(\rho v, \frac{1}{\rho}\widetilde{p}(v,0)\right)_{L^2(Q)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (5.13) impliquent qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\rho y(v,0)\|_{L^2(Q)} \leq C\;\|\rho v\|_{L^2(Q)}$$

et

$$\|\rho\theta(v,0)\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \leq C\ \|\rho v\|_{L^2(Q)}.$$

■

5.3 Contrôle optimal (Cas où G = {0})

On considère l'ensemble $L^2_\rho(Q) = \left\{ w \in L^2(Q)\ tel\ que\ \rho w \in L^2(Q) \right\}$, on note $(\ .\ ,\ .\ )_\rho = (\ \rho\ .\ ,\ \rho\ .\ )_{L^2(Q)}$ et $\|\ .\ \|_\rho = \sqrt{(\ .\ ,\ .\ )_\rho}$.
Pour tout $v \in L^2_\rho(Q)$, on a vu que le problème (5.1)(5.4) admet une solution unique $\{y(v,0), \theta(v,0)\}$. Pour tout $v \in L^2_\rho(Q)$, on définit la fonction coût pondérée

$$J^\theta_\rho(v) = \|y(v,0) - z_d\|^2_\rho + N\|v\|^2_\rho$$

où $z_d \in L^2_\rho(Q)$ et $N > 0$.
Soit maintenant $\mathcal{U}^\rho_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2_\rho(Q)$.
On associe au problème (5.1)(5.4), le problème de contrôle optimal suivant :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}^\rho_{ad}} J^\theta_\rho(v).$$

5.3.1 Existence et Unicité

Théorème 5.3 *Il existe un unique* $u \in \mathcal{U}^\rho_{ad}$ *tel que*

$$J^\theta_\rho(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}^\rho_{ad}} J^\theta_\rho(v).$$

Démonstration - Comme $\mathcal{U}_{ad}^{\rho}$ est non vide et que $J_{\rho}^{\theta}(v) \geq 0 \; \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}$, $\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}} J_{\rho}^{\theta}(v)$ existe, notons le d_{ρ}.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_{ad}^{\rho}$ une suite minimisante i.e.

$$d_{\rho} \leq J_{\rho}^{\theta}(v_n) < d_{\rho} + \frac{1}{n} < d_{\rho} + 1.$$

Il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|v_n\|_{\rho} < C \; et \; \|y(v_n, 0)\|_{\rho} < C.$$

On en déduit qu'on peut extraire de $(v_n)_n$ et $(y(v_n, 0))_n$ deux suites, encore notées de la même façon, et qu'il existe $(u, z) \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho} \times L^2(Q)$ tels que

$$v_n \rightharpoonup u \; dans \; \Big(L^2(Q), \rho dxdt\Big) \; faible,$$

$$y(v_n, 0) \rightharpoonup z \; dans \; \Big(L^2(Q), \rho dxdt\Big) \; faible.$$

Montrons que $z = y(u, 0)$.
Comme $y(v_n, 0)$ vérifie (5.1)(5.4) pour un contrôle v_n, on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$

$$(y(v_n, 0)' - \Delta y(v_n, 0), \varphi)_{L^2(Q)} = (v_n + \theta(v_n, 0).1_{\omega}, \varphi)_{L^2(Q)}. \tag{5.14}$$

On a

$$(y(v_n, 0)', \varphi)_{L^2(Q)} = -(y(v_n, 0), \varphi')_{L^2(Q)} = -\left(y(v_n, 0), \frac{\varphi'}{\rho^2}\right)_{\rho}$$

et

$$(\Delta y(v_n, 0), \varphi)_{L^2(Q)} = \left(y(v_n, 0), \frac{\Delta\varphi}{\rho^2}\right)_{\rho}.$$

Donc (5.14) devient

$$\left(y(v_n, 0), \frac{-\varphi' - \Delta\varphi}{\rho^2}\right)_{\rho} = \left(v_n + \theta(v_n, 0).1_{\omega}, \frac{\varphi}{\rho^2}\right)_{\rho}$$

en passant à la limite on obtient

$$\left(z, \frac{-\varphi' - \Delta\varphi}{\rho^2}\right)_\rho = \left(u + \theta(u,0).1_\omega, \frac{\varphi}{\rho^2}\right)_\rho$$

et la formule de Green donne

$$z' - \Delta z = u + \theta(u,0).1_\omega.$$

Comme $u + \theta(u,0).1_\omega \in L^2(Q)$, les conditions aux limites et initiales ont bien un sens et la continuité de l'application trace entraîne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= u + \theta(u,0).1_\omega & \text{dans } Q, \\ z &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec $\{u, z\} \in \mathcal{U}_{ad}^\rho \times L^2(Q)$ tel que

$$z(T) = 0.$$

L'unicité de la solution donne le résultat.

■

5.3.2 Système d'optimalité

Théorème 5.4 *Le contrôle optimal $u \in \mathcal{U}_{ad}^\rho$ pour le problème (5.1)(5.4) est caractérisé par la donnée du triplet $(u, y, p) \in \mathcal{U}_{ad}^\rho \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ solution de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = u + \theta(u,0).1_\omega, & -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = \rho^2[y(u,0) - z_d] \quad \textit{dans } Q, \\ y = 0, & p = 0 \quad \textit{sur } \Sigma, \\ y(0) = 0, & y(T) = 0 \quad \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.15}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$(p+\rho^2 Nu, v-u)_{L^2(Q)} + (p, \theta(v,0)-\theta(u,0))_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}. \quad (5.16)$$

Démonstration - Le contrôle optimal est caractérisé par la condition nécessaire d'Euler

$$\frac{d}{dt} J_\rho^\theta(u+\lambda(v-u))|_{\lambda=0} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}.$$

Ceci implique,

$$J_\rho^\theta(u+\lambda(v-u)) = \frac{1}{2}\|y(u,0)+\lambda y(v-u,0)-z_d\|_\rho^2 + \frac{N}{2}\|u+\lambda(v-u)\|_\rho^2,$$

après calcul, on obtient

$J_\rho^\theta(u+\lambda(v-u)) - J_\rho^\theta(u) =$

$$\lambda(y(u,0)-z_d, y(v-u,0))_\rho + \frac{\lambda^2}{2}\|y(v-u,0)\|_\rho^2 + \lambda(u,v-u)_\rho + \frac{N\lambda^2}{2}\|v-u\|_\rho^2,$$

et donc

$$(y(u,0)-z_d, y(v-u,0))_\rho + N(u,v-u)_\rho \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}. \quad (5.17)$$

On introduit l'état adjoint $p \in L^2(Q)$ tel que

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p &= \rho^2[y(u,0)-z_d] \quad \text{dans } Q, \\ \quad p &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

D'après l'inégalité (5.17),

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, y(v-u,0)\right)_{L^2(Q)} + N(u,v-u)_\rho \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}.$$

En utilisant la formule de Green,

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, y(v-u,0)\right)_{L^2(Q)} = \left(p, \frac{\partial(y(v-u,0))}{\partial t} - \Delta(y(v-u,0))\right)_{L^2(Q)} +$$

$$(p(0), y(v-u,0)(0))_{L^2(\Omega)} - (p(T), y(v-u,0)(T))_{L^2(\Omega)} + \int_\Sigma \frac{\partial p}{\partial \nu}(y(v-u,0))\, d\sigma -$$

$$\int_\Sigma p \frac{\partial (y(v-u,0))}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Or $y(v-u,0)$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z & = & v - u + \theta(v-u,0).1_\omega & \text{dans } Q, \\ z & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right.$$

et on a de plus

$$z(T) = 0.$$

Cela entraîne l'inégalité variationnelle (5.16).

■

5.4 Contrôle sans regret (Cas où G $\neq \{0\}$)

5.4.1 Contrôle à moindres regrets

On suppose ici que $G = L^2(\Omega)$. On cherche à résoudre le problème relaxé

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}^\rho} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \left(J_\rho^\theta(v,g) - J_\rho^\theta(0,g) - \gamma \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \right). \tag{5.18}$$

D'après le lemme (5.4), $y(v,g) = y(v,0) + y(0,g)$ et $\theta(v,g) = \theta(v,0) + \theta(0,g)$, ceci nous permet d'obtenir

$$J_\rho^\theta(v,g) - J_\rho^\theta(0,g) = J_\rho^\theta(v,0) - J_\rho^\theta(0,0) + 2\left(y(v,0), y(0,g)\right)_\rho.$$

Proposition 5.1 *On suppose que* $\|\rho v\|_{L^2(Q)} < +\infty$. *On a l'égalité*

$$2\left(y(v,0), y(0,g)\right)_\rho = 2\left(v - \frac{1}{\rho^2}\widetilde{p}(v,0).1_\omega, \widetilde{p}(0,g)\right)_{L^2(Q)} + 2(\widetilde{p}(v,0), g)_{L^2(\Omega)}. \tag{5.19}$$

Démonstration - On utilise pour cela la formulation variationnelle (5.7), on a

$$\begin{cases} a(\widetilde{p}(v,0), \widetilde{p}(0,g)) &= \ell(\widetilde{p}(0,g)), \\ a(\widetilde{p}(0,g), \widetilde{p}(v,0)) &= \ell(\widetilde{p}(v,0)) \end{cases}$$

et en sommant ces deux égalités, on trouve

$$2\left(\frac{1}{\rho^2}L^*\widetilde{p}(v,0), L^*\widetilde{p}(0,g)\right)_{L^2(Q)} = 2\left(v - \frac{1}{\rho^2}\widetilde{p}(v,0).1_\omega, \widetilde{p}(0,g)\right)_{L^2(Q)} + (\widetilde{p}(v,0), g)_{L^2(\Omega)}.$$

Or, d'après (5.8)

$$\left(y(v,0), y(0,g)\right)_\rho = \left(\frac{1}{\rho^2}L^*\widetilde{p}(v,0), L^*\widetilde{p}(0,g)\right)_{L^2(Q)}.$$

■

Lemme 5.6 *L'opérateur* $M : \ g \longmapsto \widetilde{p}(0,g)$ *à valeurs dans* $\left(L^2(Q), \frac{1}{\rho}dxdt\right)$ *est linéaire continu sur* $L^2(\Omega)$.

Démonstration - Tout d'abord, montrons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\widetilde{p}(0,g)(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.20}$$

D'après (5.5),

$$\|\widetilde{p}(0,g)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \ a(\widetilde{p}(0,g), \widetilde{p}(0,g)) = C\ell(\widetilde{p}(0,g))$$

or

$$\ell(\widetilde{p}(0,g)) = (g, \widetilde{p}(0,g))_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\widetilde{p}(0,g)(0)\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où (5.20).

L'inégalité (5.5) nous permet également d'obtenir

$$\left\| \frac{1}{\rho}\ \widetilde{p}(0,g) \right\|^2_{L^2(Q)} \leq C\ a(\widetilde{p}(0,g), \widetilde{p}(0,g)) = C\ell(\widetilde{p}(0,g)),$$

et puisque

$$\ell(\widetilde{p}(0,g)) \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\widetilde{p}(0,g)(0)\|_{L^2(\Omega)},$$

à l'aide de (5.20), on trouve qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \frac{1}{\rho}\ \widetilde{p}(0,g) \right\|^2_{L^2(Q)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

De la linéarité de l'application $g \longmapsto \widetilde{p}(0,g)$, on en déduit sa continuité.

■

L'opérateur M admet alors un opérateur adjoint M^* et on a

$$J^\theta_\rho(v,g) - J^\theta_\rho(0,g) = J^\theta_\rho(v,0) - J^\theta_\rho(0,0) + (S(v), g)_{L^2(\Omega)} \tag{5.21}$$

avec S l'opérateur linéaire continu sur $L^2(Q)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ tel que

$$S(v) = M^* \left(v - \frac{2}{\rho^2} \widetilde{p}(v,0).1_\omega \right) + \widetilde{p}(v,0)(0).$$

Ainsi, le problème (5.18), après l'utilisation de la formule de la polaire, équivaut au problème

$$\inf_{v \in \mathcal{U}^\rho_{ad}} \mathcal{J}^\gamma_\rho(v) \tag{5.22}$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma_\rho(v) = J^\theta_\rho(v,0) - J^\theta_\rho(0,0) + \frac{1}{4\gamma} \left\| S(v) \right\|^2_{L^2(Q)}. \tag{5.23}$$

Proposition 5.2 *Il existe un unique contrôle à moindres regrets u_γ solution de (5.22)-(5.23).*

Démonstration - cf. Lemme 2.2

Théorème 5.5 *Le contrôle à moindres regrets $u_\gamma \in \mathcal{U}^\rho_{ad}$ est caractérisé par la donnée du quadruplet $\{u_\gamma, y_\gamma, \widetilde{\theta}_\gamma, p_\gamma\} \in \mathcal{U}^\rho_{ad} \times L^2(Q) \times V \times L^2(Q)$ solution unique du système*

$$\left\{\begin{array}{rclrcll} L\,y_\gamma &=& u_\gamma + \theta(u_\gamma,0).1_\omega, & L\,p_\gamma &=& y_\gamma - z_d + \widetilde{\theta}_\gamma\,.1_\omega & \textit{dans} \quad Q,\\ y_\gamma &=& 0, & p_\gamma &=& 0 & \textit{sur} \quad \Sigma,\\ y_\gamma(0) &=& 0, & p_\gamma(0) &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega,\\ y_\gamma(T) &=& 0, & p_\gamma(T) &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{5.24}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\left(T^*[Lp_\gamma - \widetilde{\theta}_\gamma\,.1_\omega] + N\rho^2 u_\gamma + \frac{1}{\gamma} S^* S(u_\gamma), v - u_\gamma\right)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^\rho_{ad} \tag{5.25}$$

où $y_\gamma = y(u_\gamma,0)$, $p_\gamma = p(u_\gamma,0)$, $\widetilde{\theta}_\gamma = \widetilde{\theta}(u_\gamma,0)$, S^* est l'adjoint de l'opérateur S et T^* l'adjoint de l'opérateur

$$T:\ v \mapsto L^*\widetilde{p}(v,0).$$

Démonstration - La condition nécessaire d'Euler-Lagrange satisfaite par u_γ donne

$$\begin{aligned}(y_\gamma - z_d, \rho^2 y(v-u_\gamma,0))_{L^2(Q)} + \quad & N(\rho^2 u_\gamma, v-u_\gamma)_{L^2(Q)} + \\ & \frac{1}{\gamma}(S(u_\gamma), S(v-u_\gamma))_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^\rho_{ad}.\end{aligned}$$

On introduit maintenant $\sigma_\gamma = \sigma(u_\gamma,0) \in V$ solution unique du problème

$$a(\sigma_\gamma, q) = \int_Q (y_\gamma - z_d)\, q\, dxdt \qquad \forall\ q \in V,$$

et on définit l'état *adjoint* $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ par

$$p_\gamma = \frac{1}{\rho^2} L^* \sigma_\gamma.$$

En posant $\widetilde{\theta}_\gamma = -\dfrac{1}{\rho^2}\sigma_\gamma$, le couple $(\widetilde{\theta}_\gamma, p_\gamma)$ est solution du problème de contrôlabilité à zéro :

$$\begin{cases} L\, p_\gamma & = & y_\gamma - z_d + \widetilde{\theta}_\gamma .1_\omega & \text{dans} & Q, \\ p_\gamma & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ p_\gamma(0) = p_\gamma(T) & = & 0 & \text{dans} & \Omega \end{cases}$$

La condition d'Euler s'écrit alors :

$$(\ Lp_\gamma - \widetilde{\theta}_\gamma .1_\omega\ ,\ \rho^2 y(v-u_\gamma, 0)\ )_{L^2(Q)} + (\ N\rho^2 u_\gamma + \frac{1}{\gamma} S^* S(u_\gamma)\ ,\ v - u_\gamma\ )_{L^2(Q)} \geq 0.$$

On a par ailleurs

$$(L\, p_\gamma - \widetilde{\theta}_\gamma .1_\omega, \rho^2 y(v-u_\gamma, 0))_{L^2(Q)} \ = \ (T^*[L\, p_\gamma - \widetilde{\theta}_\gamma .1_\omega], v-u_\gamma)_{L^2(Q)} \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}^\rho,$$

où T^* est l'adjoint de l'opérateur linéaire continue

$$T:\ v \mapsto L^* \widetilde{p}(v,0) \text{ de } L^2_\rho(Q) \text{ dans } \big(L^2_\rho(Q),\ \rho^2\, dxdt\big)\,.$$

■

5.4.2 Caractérisation du contrôle sans regret

On donne maintenant la système d'optimalité du contrôle sans regret.

Théorème 5.6 *Le contrôle sans regret $u \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho}$ est caractérisé par la donnée du quadruplet $\{u, y, \widetilde{\theta}, p\} \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho} \times L^2(Q) \times V \times L^2(Q)$ solution unique du système*

$$\left\{\begin{array}{rclrcll} L\,y & = & u + \theta(u,0).1_\omega, & L\,p & = & y - z_d + \widetilde{\theta}\,.1_\omega & \textit{dans} \quad Q, \\ y & = & 0, & p & = & 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) & = & 0, & p(0) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ y(T) & = & 0, & p(T) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{5.26}$$

et de l'inégalité variationnelle

$$\Big(T^*[Lp - \widetilde{\theta}\,.1_\omega] + N\rho^2 u, v - u\Big)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^{\rho} \tag{5.27}$$

où $y = y(u,0)$, $p = p(u,0)$, $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}(u,0)$, S^* est l'adjoint de l'opérateur S et T^* l'adjoint de l'opérateur

$$T: \ v \mapsto L^* \widetilde{p}(v,0).$$

Démonstration - Comme p_γ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial p_\gamma}{\partial t} - \Delta p_\gamma & = & y_\gamma - z_d + \widetilde{\theta}_\gamma\,.1_\omega & \text{dans} \quad Q, \\ p_\gamma & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ p_\gamma(0) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right.$$

(et vérifie également $p_\gamma(T) = 0$) et $\left\| y_\gamma - z_d + \widetilde{\theta}_\gamma\,.1_\omega \right\|_{L^2_\rho(Q)} \leq C$, la régularité du problème de l'équation de la chaleur entraîne que

$$\|p_\gamma\|_{L^2_\rho(]0,T[;H^1_0(\Omega))} + \left\| \frac{\partial p_\gamma}{\partial t} \right\|_{L^2_\rho(]0,T[;H^{-1}(\Omega))} \leq C,$$

où C est une constante positive.

On peut donc extraire des suites $(p_\gamma)_\gamma$, $(\widetilde{\theta}_\gamma)_\gamma$ et $(y_\gamma)_\gamma$, des sous-suites notées de la même façon telles que :

$$\begin{array}{rcll} p_\gamma & \rightharpoonup & p & \text{faiblement dans} \quad L^2_\rho(Q), \\ \widetilde{\theta}_\gamma & \rightharpoonup & \widetilde{\theta} & \text{faiblement dans} \quad L^2_\rho(Q), \\ y_\gamma & \rightharpoonup & y & \text{faiblement dans} \quad L^2_\rho(Q), \end{array} \tag{5.28}$$

Et, puisqu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|u_\gamma\|_{L^2_\rho(Q)} \leq C$$

alors on peut donc extraire de la suite $(u_\gamma)_\gamma$ une sous-suite notée de la même façon telle que

$$u_\gamma \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} \quad \mathcal{U}^\rho_{ad}, \tag{5.29}$$

On obtient donc le résultat grâce à la continuité de l'application

$$v \longmapsto \theta(v,0).$$

■

Bibliographie

[1] **Aubin J. P. (1984)** L'analyse non linéaire et ses motivations économiques. Masson, Paris, New York.

[2] **Bergounioux M. (1993)** Sur un problème de contrôle à moindres regrets. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, pp. 61-63.

[3] **Brezis H. (1992)** Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, Milan, Barcelone, Bonn.

[4] **Dorville R., Nakoulima O., Omrane A. (2004)** Low regret control of singular distributed systems : The ill-posed backwards heat problem. Applied Mathematics Letters. A paraître.

[5] **Dorville R., Nakoulima O., Omrane A. (2004)** Contrôle optimal pour les problèmes de contrôlabilité des systèmes distribués à données manquantes. Note au C. R. Acad. Sci. de Paris. A paraître.

[6] **Èmanuilov O. Yu.(1993)** Optimal control problem for the backward heat equation. Sibirskii Matematicheskii, Vol. 34, $N°$ 1, pp. 204-211, Moscow.

[7] **Gabay D., Lions J. L. (1994)** Décisions stratégiques à moindres regrets. Note au C. R. Acad. Sci. de Paris, t. 319, Série I, pp 1249-1256.

[8] **Hörmander L.(1985)** The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Springer Verlag.

[9] **Kotarski W. (1997)** Some problems of optimal and Pareto optimal control for distributed parameter systems. Wydawnictwo Universytetu Slaskiego, Katowice, Poland.

[10] **Lebeau G., Robbiano L. (1995)** Contrôle exact de l'équation de la chaleur. Comm. in Partial Differentiel Equations, 20, pp. 335-356.

[11] **Lions J. L. (1969)** Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris.

[12] **Lions J. L. (1981)** Optimal control of non well-posed systems. Science Press, Beijing.

[13] **Lions J. L. (1983)** Contrôle optimal pour les systèmes distribués singuliers. Gauthiers-Villard, Paris.

[14] **Lions J. L. (1985)** Optimal control of non well-posed distributed systems. Mathematical Control Theory Banach Center Publications, volume 14, pp 299-310, Warsaw.

[15] **Lions J. L. (1986)** Contrôle de Pareto de systèmes distribués. Le cas stationnaire et d'évolution. Note au C. R. Acad. Sci. de Paris, t. 302, Série I, No 6, pp 223-227 et pp 413-417.

[16] **Lions J. L. (1992)** Contrôle à moindres regrets des systèmes distribués. Note au C. R. Acad. Sci. de Paris, t. 315, Série I, pp 1253-1257.

[17] **Lions J. L. (1994)** No-regret and low-regret control. Environment, economics and their mathematical models.

[18] **Lions J. L. (1999)** Duality arguments for multi agents least-regret control. Institut de France.

[19] **Lions J. L.- Magenes E. (1968)** Problèmes aux limites non homogènes et applications (vol 1 et 2). Dunod.

[20] **Nakoulima O., Omrane A., Velin J. (2000)** Perturbations à moindres regrets dans les systèmes distribués à données manquantes. Note au C. R. Acad. Sci. de Paris, t. 330, Série I, pp 801-806.

[21] **Nakoulima O., Omrane A., Velin J. (2003)** On the pareto control and no-regret control for distributed systems with incomplete data. SIAM J. Control Optim. vol. 42, N° 4, pp. 1167-1184.

[22] **Puel J.P.(2000-2001)** Contrôlabilité exacte et approchée pour les systèmes distribués. Notes de cours de D.E.A., Université de Paris 6.

[23] **Rivera P.H., Vasconcellos C.F. (1988)** Optimal control for a backward parabolic system. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 25, $N°$ 5, pp. 1163-1172.

[24] **Russell D.(1973)** A unified Boundary Controllability Theory for Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations, Studies in Applied Mathematics, Vol. 50, $N°$ 3, pp. 189-212.

[25] **Savage L. J. (1972)** The Foundations of Statistics. Dover (2nd Edition).

[26] **Zuazua E.** Controllability of the linear system of thermoelasticity. Journal de Maths Pures et Appliquées.

Notations

Tout au long de cette thèse et sauf mention explicite du contraire

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	ouvert
$Q = \Omega \times]0,T[$	
$\partial\Omega = \Gamma$	frontière de Ω
$\Sigma = \Gamma \times]0,T[$	
$\omega \subset \Omega$	ouvert
$\mathcal{U}_{ad}$	convexe fermé non vide de $L^2(Q)$
G	sous espace vectoriel fermé non vide de $L^2(\Omega)$
$\widetilde{G}$	complété de G dans $L^2(\Omega)$
E'	espace dual de E
$\langle\ ,\ \rangle$	produit scalaire de la dualité $E',\ E$
1_ω	indicatrice sur ω
$\rightharpoonup$	convergence faible
$\rho \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,T[)$	poids
$L^2_\rho(Q) = \left\{ w \in L^2(Q) \text{ tel que } \rho w \in L^2(Q) \right\}$	
$\mathcal{U}^\rho_{ad}$	convexe fermé non vide de $L^2_\rho(Q)$
$H^1,\ H^1_0,\ H^m$	espaces de Sobolev
$\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$	dérivée normale extérieure
$\Delta z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$	laplacien de z

Index

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude du contrôle de trois problèmes singuliers associés à l'équation de la chaleur. Pour le contrôle de chacun de ces trois problèmes, on propose la notion de contrôle sans regret.

Pour y parvenir, nous utilisons la méthode de régularisation et à la théorie des systèmes distribués à données manquantes. Nous présentons nos résultats afin qu'ils soient applicables aux problèmes linéaires de type parabolique.

TITLE : On the control of some singular problems associated with the Heat Equation

Abstract : This thesis is devoted to the study of the control of three singular problems associated with the heat equation. To control each of these three problems, we propose the notion of no-regret control.

To this end, we use the regularisation method and the theory of distributed systems with incomplete data. We present our results in order to apply them to parabolic-type linear problems.

Keywords. Heat equation, non-well (or ill) posed problem, distributed system with incomplete data, no-regret control.

DISCIPLINE : **Mathématiques**

UNIVERSITÉ DES ANTILLES ET DE LA GUYANE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
CAMPUS DE FOUILLOLE
97159 Pointe-à-Pitre CEDEX (Guadeloupe, F.W.I.)